ÜBER DIE WIRBELSTRÖME IN EINEM BLECH ODER ZYLINDER MIT RÜCKSICHT AUF DIE THEORIE DER INDUKTIONSWAGE UNTERSUCHT

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE VERFASZT
UND EINER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
(II. SEKTION) DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN
LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT ZU MÜNCHEN

VORGELEGT AM 1. JULI 1908

VON

FREDERICK W. GROVER

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1909

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548314_0048

MEINEN LIEBEN ELTERN

GEWIDMET

Einleitung und Literaturübersicht.

Es ist schon lange bekannt gewesen, daß das Gleichgewicht einer Wheatstoneschen Brückenkombination, in welcher sich zwei oder mehrere Rollen befinden, sehr wesentlich von der Anwesenheit von Metallstücken in ihrer Nähe beeinflußt wird. Diese Störung erklärt sich durch die Rückwirkung der im Metall induzierten Ströme auf die Brücke und ist natürlich um so größer, je größer die Leitfähigkeit des Metalls ist. Hierin liegt das Prinzip der Hughesschen Induktionswage[1]), die jedoch, trotz ihrer Empfindlichkeit nur qualitative Messungen der Leitfähigkeit gestattet, nämlich deshalb, weil die Gesetze der Stromverteilung in den Metallstücken im allgemeinen nicht gut bekannt sind. Die späteren Beobachter haben sich folglich damit beschäftigt, eine Anordnung der Wage zu finden, für die die Theorie auszuführen ist. Das folgende Literaturverzeichnis des Gegenstandes umfaßt daher nicht nur experimentelle Arbeiten, sondern auch rein theoretische Abhandlungen.

Niven[2]) und Lamb[3]) haben die Zeitkonstante einer Kugel berechnet, indem sie diese Größe definierten als „die längste Zeit, in welcher ein Strom (*bei geeigneter Anfangsverteilung*) von der Intensität 1 auf die Intensität $1/e$ herabsinkt"; dasselbe Problem für dünne, runde Scheiben ist, unter derselben Definition, von Lamb[4]) erledigt worden.

Oberbeck[5]) behandelte den Fall eines unendlich langen Eisenzylinders und beschreibt das Feld wesentlich durch dieselben Formeln wie hier (Kapitel IV). Unter seiner Größe f ist zu verstehen der Faktor, mit dem die Amplitude des ursprünglichen magnetischen Feldes zu multiplizieren ist, um diejenige des durch die Anwesenheit des Stabes veränderten Feldes zu bekommen. Ähnlicherweise bedeutet sein Schwächungskoeffizient F das Verhältnis des Integrals des veränderten Feldes, über den Querschnitt genommen, zu demselben Integrale bezüglich des ursprünglichen Feldes. Seine Ausdrücke für diese Größen stimmen vollständig mit den unseren (Kapitel IV) überein, wenn man darauf Rücksicht nimmt, daß Oberbeck

1) Phil. Mag. (5) 8, 1879, S. 50.
2) Phil. Trans. 172, 1882, S. 307.
3) Proc. Roy. Soc. 35, 1883, S. 130.
4) Proc. Roy. Soc. 42, 1887, S. 289.
5) Wied. Ann. 21, 1884, S. 672.

die für Eisen zulässige Annäherung $\mu = 4\pi k$ gemacht hat, wo k die magnetische Suszeptibilität bedeutet. In dieser Arbeit ist Oberbeck wahrscheinlich einigen der Ergebnisse von Heaviside zuvorgekommen.

Die Induktion von Strömen in Kernen ist eingehend von Heaviside[1]) behandelt worden, der die Hauptgleichungen des Feldes und der Energieströmung gegeben hat. Später ist die Theorie einer leitenden Kugel von Oberbeck[2]) erledigt worden.

Die Arbeiten von J. J. Thomson und Debye über Bleche und Stäbe werden unten (S. 8) speziell besprochen werden.

Die durch die Anwesenheit eines Metallstückes verursachte Veränderung des Stromes in einer benachbarten Spule ist von der Beschaffenheit, daß nicht nur der effektive Widerstand, sondern auch die Selbstinduktion der Spule eine Veränderung erleidet. Bei unmagnetischen Metallen besteht die Veränderung in einer Abnahme der Selbstinduktion, bei magnetischen im Gegenteil wenigstens bei nicht zu großer Frequenz in einer Zunahme. Die Veränderung des Widerstandes ist stets positiv. Die Zeitkonstante τ wollen wir, nach Max Wien, als Quotienten der Selbstinduktionsveränderung $\triangle L$ durch die Widerstandszunahme $\triangle W$ definieren, d. h. $\tau = \frac{-\triangle L}{\triangle W}$. Dadurch wird die Analogie mit der verwandten Größe, der Zeitkonstante eines Stromkreises, $\frac{L}{W}$ gekennzeichnet. Weder Oberbeck noch Heaviside hat die Größen $\triangle L$ und $\triangle W$ für die von ihnen behandelten Fälle gegeben.

Bezüglich der experimentellen Bestimmung der Leitfähigkeit sind die Versuche von Oberbeck und Bergmann[3]) zu erwähnen. Ihre Induktionswage gestattet die Leitfähigkeit dünner kreisförmiger Metallplatten zu bestimmen. Die störende Wirkung der betreffenden Platte in der Nähe der einen Spule der Brücke wird durch die Wirkung geeigneter Metallplatten desselben Radius und bekannter Leitfähigkeit gewissermaßen den Gewichtsstücken der Induktionswage auf die andere Spule kompensiert. Die Bedingung für Gleichgewicht ist, daß das Produkt aus der Dicke und der Leitfähigkeit der zu untersuchenden Platte gleich der Summe der Werte desselben Produktes für die kompensierenden Platten sein muß. Leider ist diese Bedingung auch für sehr dünne Platten nur annähernd gültig, die Brücke hat deshalb keine allgemeine Verwendung gefunden.

Max Wien[4]) hat in einer sehr eingehenden Untersuchung eine später (S. 60) zu besprechende Methode gegeben, die Leitfähigkeit zweier gleichen Metallstücke zu vergleichen, und ferner angenäherte Formeln für

---

1) Elect. Papers I, S. 353. 2) Wied. Ann. 31, 1887, S. 812.
3) Wied. Ann. 31, 1887, S. 792. 4) Wied. Ann. 49, 1893, S. 306.

die Berechnung der absoluten Werte dieser Größe für Kugeln und dünne, runde Scheiben abgeleitet.

Speziell sei noch auf eine kürzliche Mitteilung von Schlösser[1]) hingewiesen, in welcher die Frage der Abhängigkeit von $\triangle L$ und $\triangle W$ von der Leitfähigkeit, der Schwingungszahl und den Dimensionen des Kernes experimentell untersucht wurde. (Näheres S. 56.)

Definitionen und allgemeine Begriffe.

Denken wir uns ein Solenoid von dem Strom J durchflossen. Wenn L und W die Selbstinduktion und den Widerstand der Spule bedeuten, und E die zwischen den Enden der Spule bestehende elektromotorische Kraft, so erhält man die gesamte Leistung der Spule als Summe von zwei Bestandteilen, nämlich erstens der in der Spule entwickelten Wärmemenge $Q = WJ^2$ und zweitens der für die zeitliche Veränderung des magnetischen Feldes erforderten Energie, $\dot{M} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2} LJ^2)$ beide pro Zeiteinheit gerechnet. Folglich

$$(1) \qquad JE = Q + \dot{M} = WJ^2 + \frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2} LJ^2) = WJ^2 + LJ\dot{J}.$$

Bei Einführung eines Metallkernes in die Spule wird der Energieverbrauch in dem von dem Kern ausgefüllten Raum verändert, und zwar um einen Betrag, der die Summe der im Metall entwickelten Wärme und der durch das Metall verursachten Veränderung der Größe $\dot{M}$ darstellt. Diese Energiemenge muß von der Spule geliefert werden. Folglich ist, um dieselbe Stromstärke J in der Spule aufrecht zu erhalten, eine Zunahme $\triangle E$ der Spannung erforderlich, d. h. die effektiven Werte des Widerstandes und der Selbstinduktion haben sich verändert um die Beträge $\triangle W$, $\triangle L$, die mit $\triangle E$ durch die Gleichung

$$(2) \qquad J\triangle E = \triangle(Q + \dot{M}) = J^2\triangle W + J\dot{J}\triangle L$$

verknüpft sind.

Diese einfache Annahme dürfen wir nur unter Voraussetzung eines unendlich langen Stabes machen. In diesem Falle ist das magnetische Feld außerhalb des Stabes durch die Anwesenheit des letzteren gar nicht beeinflußt. Im Falle einer endlichen Länge des Kerns hingegen müssen wir noch ein Glied in Gleichung (2) hinzufügen, das die gegenseitige Induktion zwischen dem Kerne und der Spule berücksichtigen soll, wobei im allgemeinen die Berechnung der Selbstinduktionsveränderung der Spule

1) Inauguraldissertation, Münster 1908.

erschwert wird. Näheres hierüber wird in Kapitel III ausgeführt. An dieser Stelle genügt es darauf hinzuweisen, daß Gleichung (2) nicht für alle Fälle ausreichend ist.

Wenn wir uns auf ein unendlich langes Solenoid beschränken und ein harmonisch wechselndes magnetisches Feld voraussetzen, so besteht das einfache Verhältnis zwischen dem Strom J und dem magnetischen Feld $\mathfrak{H}$

$$\mathfrak{H} = 4\pi JN = H\cos nt, \tag{3}$$

wo n die Schwingungszahl in der 2π-fachen Zeiteinheit, N die Windungszahl pro Längeneinheit der Spule bedeutet. Infolgedessen ergibt sich durch Einsetzen der aus Gleichung (3) berechneten Werte von J und $\dot{J}$ in Gleichung (2)

$$\Delta(Q + \dot{M}) = \left(\frac{H}{4\pi N}\right)^2 \Delta W \cos^2 nt - n\left(\frac{H}{4\pi N}\right)^2 \Delta L \cos nt \sin nt. \tag{4}$$

Um ΔW und ΔL für ein beliebiges Metallstück berechnen zu können, müssen wir ferner die dem Metalle zugeführte Energie auswerten.

Dies geschieht, indem wir den Poyntingschen Satz anwenden. Nach diesem ist in einem Raumteil die dem elektromagnetischen Felde entströmte Energiemenge proportional dem Integrale der normalen Komponente des sogenannten Strahlungsvektors $\mathfrak{S}$, über die Oberfläche σ des betreffenden Raumes erstreckt. Ist die Normale n nach außen positiv gerechnet, so ist

$$Q + \dot{M} = -\int_\sigma \mathfrak{S}_n \, d\sigma = -\frac{1}{4\pi}\int [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_n \, d\sigma. \tag{5}$$

In dieser Gleichung bedeutet $\mathfrak{E}$ das (elektromagnetisch gemessene) elektrische Feld. Unter den eckigen Klammern ist das Vektorprodukt der eingeschlossenen Größe zu verstehen.

In jedem bestimmten Fall müssen wir daher zunächst die beiden Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ berechnen und deren Vektorprodukt über die Oberfläche integrieren, was natürlich nur in besonderen Fällen ausführbar ist. Sowohl wegen ihrer mathematischen Einfachheit als wegen ihrer praktischen Wichtigkeit empfehlen sich die beiden Fälle eines Metallbleches und eines Zylinders, mit denen wir uns im folgenden beschäftigen werden.

Die Energie desselben Raumteils ohne Kern findet man durch die Gleichung

$$M_0 = \frac{1}{8\pi}\int_S \mathfrak{H}_0^2 \, dS, \tag{6}$$

wo das Integral sich durch den ganzen Raumteil erstrecken muß und $\mathfrak{H}_0$ den Wert des homogenen magnetischen Feldes $H\cos nt$ bedeutet. Hieraus als zugehörige Energiezufuhr pro Zeiteinheit

$$\dot{M}_0 = \frac{1}{8\pi}\int_S \frac{d}{dt}(\mathfrak{H}_0^2)\,dS = \frac{nH^2}{4\pi}\cos nt \sin nt \int dS. \tag{7}$$

Demnach berechnet sich der nach Einführung des Kernes von der Spule zu leistende Mehraufwand an Energie aus der Gleichung

$$\triangle(Q+\dot{M}) = Q+\dot{M}-\dot{M}_0 = -\frac{1}{4\pi}\int_\sigma [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_n\,d\sigma + \frac{H^2 n}{4\pi}\cos nt \sin nt \int dS \tag{8}$$

In der Berechnung der Energie des Raumteils ohne Kern haben wir, anstatt den Poyntingschen Satz wieder anzuwenden, die Energie einfach gleich der magnetischen Energie des Dielektrikums angenommen. Wir haben nämlich stillschweigend die Verschiebungsströme und folglich das elektrische Feld im Dielektrikum vernachlässigt. Desgleichen werden wir im folgenden bei der Bestimmung des Feldes $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ stets die Verschiebungsströme vernachlässigen. Für das Metall bedeutet das wegen der Größe der Leitfähigkeit keine nennenswerte Ungenauigkeit. Im Dielektrikum aber ist die Vernachlässigung der Verschiebungsströme gleichbedeutend mit der Annahme einer momentanen Ausbreitung der elektrischen Kraft, also mit einem Aufgeben der wesentlichsten Idee der Faraday-Maxwellschen Theorie. Man kann bemerken, daß in Strenge ein zeitlich veränderliches und räumlich homogenes Feld $\mathfrak{H}_0 = H\cos nt$, wie wir es hier voraussetzen, unmöglich ist. Trotzdem ist diese Annahme für die Behandlung der Vorgänge im Innern des Metallkerns durchaus zulässig und allgemein üblich.

I. Kapitel.

Das Problem eines unendlich langen und unendlich breiten Bleches.

Das Problem der Strömung in einem Stabe mit rechteckigem Querschnitt ist wegen der Bequemlichkeit, verschiedene Metallsorten in dieser Form zu bekommen, nicht nur mathematisch, sondern auch praktisch wichtig. Es ist schon vorgekommen, daß uns einige der gewöhnlichen Metalle nur in dieser Form rein geliefert werden konnten.

Wir werden uns hier auf den Fall eines Stabes, dessen Dicke im Verhältnis zur Breite sehr klein, aber nicht verschwindend ist, oder kurz gesagt auf den Fall eines Bleches beschränken.

Das Problem der Berechnung der Wirbelstromverluste in einem Bleche wurde unter der Voraussetzung einer unendlichen Breite von J. J. Thomson[1]) gelöst, und kürzlich ist dasselbe Problem für einen rechteckigen Querschnitt, dessen Seitenlängen beliebig sind, von P. Debye[2]) gründlich untersucht worden. In seiner Arbeit hat er[3]) auf die Möglichkeit hingewiesen, die Vermehrung des Widerstandes und die Verminderung der Selbstinduktionskoeffizienten der umgebenden Spule aus seinen Gleichungen abzuleiten.

Für den oben erwähnten besonderen Fall eines Bleches scheint es einfacher, zunächst eine Lösung des Grenzfalls (unendliche Breite) zu finden und darauf aus den Debyeschen Gleichungen ein Korrektionsglied zu berechnen, das die kleine Abweichung infolge der bestehenden endlichen Breite darstellen soll.

Das magnetische und das elektrische Feld.

Es sei ein unendlich langer Stab angenommen, dessen Dicke 2δ gegen die Breite 2λ zu vernachlässigen ist; und ferner soll sich der Stab innerhalb eines unendlichen Solenoides befinden, das von einem harmonisch wechselnden Strome durchflossen wird.

---

1) Electrician: 28, 1892, S. 599. 2) Ztsch. f. Math. u. Phys.: 54, 1906, S. 418.
3) Ebenda S. 437.

a) In dem Raum zwischen dem Kern und dem Solenoide lauten die Maxwellschen Gleichungen, wenn wir die Verschiebungsströme vernachlässigen:

$$\text{(9)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= -\mu \dot{\mathfrak{H}}. \end{aligned}$$

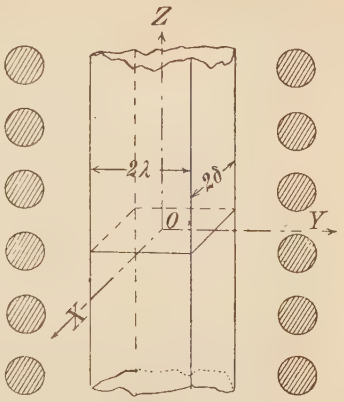


Fig. 1.

Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} &= H \cos nt \\ &= \Re \cdot He^{int}, \end{aligned}$$

wo n die Schwingungszahl in 2π Zeiteinheiten und $\Re$ den reellen Teil bedeutet.

b) Innerhalb des Kernes gelten die Gleichungen

$$\text{(10)} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{\mathfrak{J}}{\sigma} \\ 4\pi\mathfrak{J} &= 4\pi\sigma\mathfrak{E} = \operatorname{rot} \mathfrak{H} \end{aligned}$$

$\mathfrak{J}$ = spezifische Stromstärke

σ = elektrische Leitfähigkeit im elektromagnetischen Maße.

Wegen der harmonisch zeitlichen Veränderung von $\mathfrak{H}$ ist

$$\text{(11)} \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -in\mu\mathfrak{H}$$

und nach den Gleichungen (9), (10) und (11) wird

$$\text{(12)} \qquad 4\pi\sigma\mu\dot{\mathfrak{H}} = 4\pi\sigma\mu in\mathfrak{H} = \triangle \mathfrak{H}.$$

Dazu kommen die Randbedingungen

$$\mathfrak{H} = \Re \cdot He^{int}, \quad \text{wenn} \quad \begin{cases} x = \pm\delta \\ y = \pm\lambda \end{cases}.$$

Wegen der Annahme einer unendlichen Breite ist $\mathfrak{H}$ nur von der Koordinate x abhängig. Die obige Gleichung (12) lautet dann folgendermaßen

$$\text{(13)} \qquad \frac{d^2\mathfrak{H}}{dx^2} = 4\pi\sigma in\mu\mathfrak{H} = -\varkappa^2\mathfrak{H},$$

wo

$$\text{(14)} \qquad \varkappa = (1-i)h, \quad h = +\sqrt{2\pi n\mu\sigma},$$

und es bleibt von den Randbedingungen nur die erste für $x = \pm\delta$ zu berücksichtigen.

Partikulare Lösungen von (13) sind bekanntlich

$$\cos \varkappa x \quad \text{und} \quad \sin \varkappa x;$$

demnach ergibt sich mit Rücksicht auf die Randbedingung

$$\mathfrak{H} = \Re \cdot H \frac{\cos \varkappa x}{\cos \varkappa \delta} e^{int} \tag{15}$$

und

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dx} = - \Re \cdot \frac{\varkappa H \sin \varkappa x}{\cos \varkappa \delta} e^{int}, \tag{16}$$

wie von J. J. Thomson gefunden wurde.

Bezüglich des elektrischen Feldes finden wir leicht aus der Beziehung $4\pi\mathfrak{J} = \text{rot}\,\mathfrak{H}$ und aus den Überlegungen, daß $\mathfrak{H}$ überall nach der z-Achse gerichtet und unabhängig von der Koordinate y ist,

$$4\pi\sigma\mathfrak{E} = 4\pi\sigma\mathfrak{E}_y = - \frac{d\mathfrak{H}}{dx}. \tag{17}$$

Die Diskussion und graphische Darstellung dieser Formen findet man im Kapitel III, Fig. 4 und 5.

Die Energie des Feldes.

Gehen wir jetzt zu der Berechnung der dem Kerne pro Zeiteinheit zugeführten Energiemenge $Q + \dot{M}$.

Wie wir eben gefunden haben, liegen an der Oberfläche $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in deren Ebene. Folglich steht der Strahlungsvektor überall senkrecht auf der Oberfläche und, da ferner $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ senkrecht zueinander sind, ist für ihr Vektorprodukt einfach das Produkt ihrer absoluten Werte zu setzen.

Demnach ergibt sich aus (17) und (5)

$$\mathfrak{S}_n = \frac{H \cos nt}{(4\pi)^2 \sigma} \cdot \Re \left[\varkappa H \frac{\sin \varkappa \delta}{\cos \varkappa \delta} e^{int} \right]$$

und mit Rücksicht auf Gleichung (5) nach Multiplikation mit der doppelten Breite 4λ

$$Q + \dot{M} = - \frac{H^2 \lambda}{4\pi^2 \sigma} \cos nt \, \Re \left[\varkappa \frac{\sin \varkappa \delta}{\cos \varkappa \delta} e^{int} \right]. \tag{18}$$

Den reellen Teil des komplexen Ausdruckes finden wir jetzt, indem wir die halbe Summe der betreffenden Größe und ihrer konjugierten bilden. Folglich findet man mit Einführung des in (14) definierten Wertes von $\varkappa$

$$Q + \dot{M} = \frac{H^2 \lambda}{4\pi^2 \sigma} \left(\frac{\mathfrak{Sin}\, 2h\delta - \sin 2h\delta}{\mathfrak{Cof}\, 2h\delta + \cos 2h\delta} \right) \cos^2 nt$$

$$- \frac{H^2 \lambda}{4\pi^2 \sigma} \left(\frac{\mathfrak{Sin}\, 2h\delta + \sin 2h\delta}{\mathfrak{Cof}\, 2h\delta + \cos 2h\delta} \right) \cos nt \sin nt.$$

Hier bedeuten $\mathfrak{Sin}$ und $\mathfrak{Cof}$ die hyperbolischen Sinus- und Kosinusfunktionen.

Denken wir jetzt den Kern entfernt, so wird nach (7) die Energiezufuhr in dem vom Kern vorher eingenommenen Raume

$$\dot{M}_0 = -\frac{nH^2\lambda\delta}{\pi}\cos nt \sin nt$$

und endlich aus Gleichung (8)

$$(19)\quad \begin{cases} \triangle(Q+\dot{M}) = \dfrac{H^2\lambda}{4\pi^2\sigma}\left(\dfrac{\mathfrak{Sin}\,2h\delta - \sin 2h\delta}{\mathfrak{Cof}\,2h\delta + \cos 2h\delta}\right)\cos^2 nt \\ \qquad\qquad + \left(\dfrac{nH^2\lambda\delta}{\pi} - \dfrac{H^2\lambda}{4\pi^2\sigma}\cdot\dfrac{\mathfrak{Sin}\,2h\delta + \sin 2h\delta}{\mathfrak{Cof}\,2h\delta + \cos 2h\delta}\right)\cos nt \sin nt. \end{cases}$$

Vergleichen wir diese letzte Gleichung für $\triangle(Q+\dot{M})$ mit dem allgemein gültigen Ausdruck (4), so ist unmittelbar ersichtlich, daß

$$(20)\quad \begin{cases} \triangle W = 2(2h\lambda)\dfrac{N^2}{\sigma}\left(\dfrac{\mathfrak{Sin}\,2h\delta - \sin 2h\delta}{\mathfrak{Cof}\,2h\delta + \cos 2h\delta}\right) \\ -n\triangle L = -2(2h\lambda)\dfrac{N^2}{\sigma}\left(\dfrac{\mathfrak{Sin}\,2h\delta + \sin 2h\delta}{\mathfrak{Cof}\,2h\delta + \cos 2h\delta}\right) + 16\pi N^2 n\lambda\delta \end{cases}$$

und folglich

$$(21)\quad -\frac{n\triangle L}{\triangle W} = n\tau = \frac{4\pi n\sigma\delta}{h}\left(\frac{\mathfrak{Cof}\,2h\delta + \cos 2h\delta}{\mathfrak{Sin}\,2h\delta - \sin 2h\delta}\right) - \left(\frac{\mathfrak{Sin}\,2h\delta + \sin 2h\delta}{\mathfrak{Sin}\,2h\delta - \sin 2h\delta}\right).$$

Diese letzte Gleichung stellt die Größe $n\tau$ als Differenz von zwei anderen Größen dar, welche für kleines $2h\delta$ nahezu gleich sind. Um eine nutzbarere Formel für τ zu finden, müssen wir die Gleichung umformen. Wir wollen zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die reine Zahl $2h\delta$ klein oder groß ist.

Fall I. Langsame Schwingungen.

Für dünne Bleche bei mäßigen Frequenzen ist $2h\delta$ kleiner als eins, und die Entwicklung von (21) nach Potenzen von $2h\delta$ konvergiert gut.

Der Kürze halber wollen wir $2h\delta = x$ setzen. Aus den bekannten Entwicklungen der hyperbolischen und gewöhnlichen Sinusse und Kosinusse finden wir sofort

$$(22)\quad \begin{cases} \mathfrak{Sin}\,x - \sin x = \dfrac{2x^3}{3!}\left(1 + \dfrac{3!}{7!}x^4 + \dfrac{3!}{11!}x^8 + \cdots\right) \\ \mathfrak{Sin}\,x + \sin x = 2x\left(1 + \dfrac{x^4}{5!} + \dfrac{x^8}{9!} + \cdots\right) \\ \mathfrak{Cof}\,x + \cos x = 2\left(1 + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^8}{8!} + \cdots\right). \end{cases}$$

Bei Einführung dieser Werte in Gleichung (21) ergibt sich

$$n\tau = \frac{4\pi n\sigma\delta}{h}\cdot\frac{3!}{x^3}\frac{\left(1+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots\right)}{\left(1+\frac{3!}{7!}x^4+\frac{3!}{11!}x^8+\cdots\right)} - \frac{3!}{x^2}\frac{\left(1+\frac{x^4}{5!}+\frac{x^8}{9!}+\cdots\right)}{\left(1+\frac{3!}{7!}x^4+\frac{3!}{11!}x^8+\cdots\right)} + ;$$

mit Rücksicht auf Gleichung (14) ist

$$\frac{4\pi n\sigma\delta}{hx} = \frac{4\pi n\sigma}{2h^2} = \frac{1}{\mu}. \tag{23}$$

Schreiben wir jetzt

$$\frac{1}{\mu} = 1 + \frac{(1-\mu)}{\mu},$$

so folgt

$$n\tau = \frac{3!}{x^2}\left[\frac{\frac{x^4}{4!}\left(1-\frac{1}{5}\right)+\frac{x^8}{8!}\left(1-\frac{1}{9}\right)+\cdots}{1+\frac{3!}{7!}x^4+\frac{3!}{11!}x^8+\cdots} + \frac{(1-\mu)}{\mu}\frac{1+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots}{1+\frac{3!}{7!}x^4+\frac{3!}{11!}x^8+\cdots}\right].$$

Schaffen wir noch die Nenner durch Division fort, so ergibt sich der folgende Ausdruck für $n\tau$

$$n\tau = \frac{(2h\delta)^2}{5}\left[1 - \frac{(2h\delta)^4}{1890} - \cdots\right] + \frac{6}{(2h\delta)^2}\frac{(1-\mu)}{\mu}\left[1 + \frac{17}{420}(2h\delta)^4 + \cdots\right]. \tag{24}$$

Auf ganz ähnliche Weise können wir übersichtlichere Formeln für $\triangle W$ und $\triangle L$ ableiten. Es ist nämlich

$$\begin{cases} \triangle W = \frac{4\pi^2}{3}(2\lambda\cdot 2\delta)^2 \frac{\delta}{\lambda} N^2\mu^2 n^2\sigma\left[1 - \frac{17}{420}(2h\delta)^4 + \cdots\right] \\ -n\triangle L = \frac{8\pi^3}{15}(2\lambda\cdot 2\delta)^3 \frac{\delta^2}{\lambda^2} N^2\mu^3 n^3\sigma^2\left[1 + \frac{30}{(2h\delta)^4}\frac{(1-\mu)}{\mu}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{67}{6048}(2h\delta)^4 + \cdots\right]. \end{cases} \tag{25}$$

Für unmagnetische Metalle ist $(1-\mu)$ äußerst klein. Es ergibt sich daher in erster Annäherung für dünne Bleche unmagnetischer Metalle bei langsamen Schwingungen:

1. *Die Widerstandsvermehrung nimmt zu proportional der Leitfähigkeit, dem Quadrate der Schwingungszahl und dem Quadrate des Querschnittes.*

2. *Die Veränderung der Selbstinduktion wächst proportional dem Quadrate der Leitfähigkeit, dem Quadrate der Schwingungszahl und der dritten Potenz des Querschnittes.*

3. *Die Zeitkonstante verändert sich wie das Produkt aus der Leitfähigkeit und dem Querschnitt und ist von der Schwingungszahl unabhängig.*

Fall 2. Schnelle Schwingungen.

Bei schnellen Schwingungen wird, selbst bei dünnen Blechen, $2h\delta$ große Werte annehmen. Wir finden zum Beispiel $2h\delta = 10$ für ein 2 mm dickes Kupferblech, wenn der benutzte Wechselstrom eine Schwingungszahl von $\frac{n}{2\pi} = 10^5$ hat, und bei größeren Dicken ist $2h\delta$ entsprechend größer.

Für diesen Fall können wir sehr leicht vereinfachte Formeln ableiten, indem wir uns daran erinnern, daß bei großem Argumente $\mathfrak{Sin}\,x$ und $\mathfrak{Cos}\,x$ merklich einander gleich und gegen $\sin x$ und $\cos x$ überwiegend sind. Demnach lauten die Gleichungen (20), (21)

(26) $$\triangle W = N^2(4\lambda)\sqrt{\frac{2\pi n\mu}{\sigma}}$$

(27) $$-n\triangle L = N^2(4\lambda)\sqrt{\frac{2\pi n\mu}{\sigma}}\left(\frac{2h\delta}{\mu} - 1\right)$$

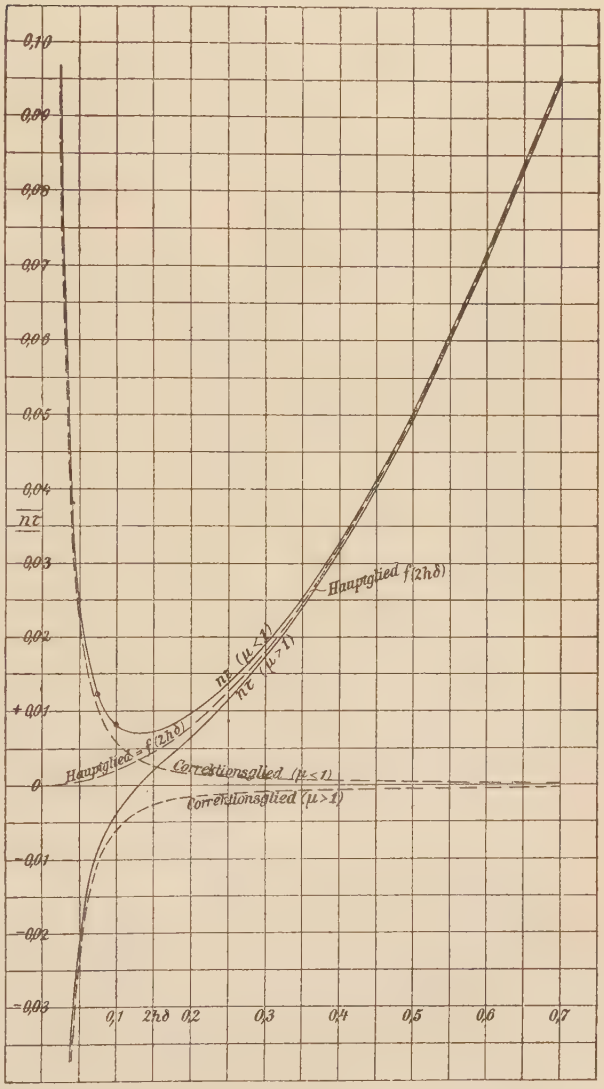
(28) $$n\tau = \frac{2h\delta}{\mu} - 1 = \frac{2\delta}{\mu}\sqrt{2\pi n\mu\sigma} - 1.$$

Die erste Formel hat Ähnlichkeit mit der von Rayleigh[1]) abgeleiteten für den Widerstand eines geraden Drahtes bei unendlich großer Schwingungszahl. Er fand nämlich in unserer Schreibweise

$$\frac{W'}{W} = \frac{R}{2}\sqrt{2\pi n\mu\sigma},$$

wo W' = Widerstand bei dem betreffenden Wechselstrom, W = Widerstand bei Gleichstrom, und R = Radius.

Aus den obigen Gleichungen ist ersichtlich, daß sich $\triangle W$ und $\triangle L$ bei großer Schwingungszahl ganz anders verhalten als bei langsamen Schwingungen. Ihre Werte sind der Größe 4λ proportional, d. h. bei Vernachlässigung von δ/λ, der Peripherie des Querschnittes, ent-

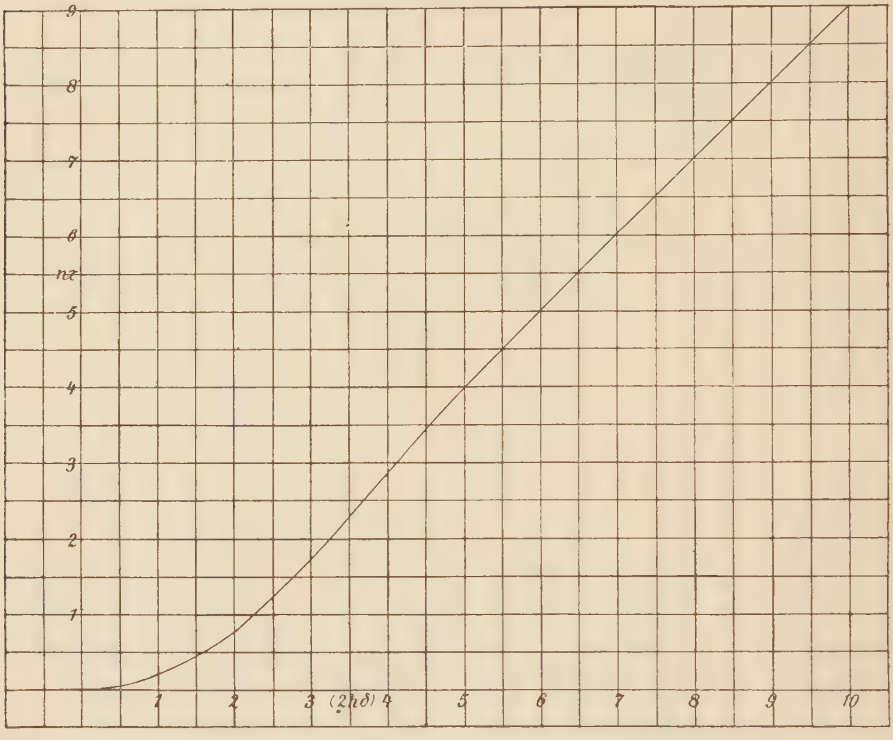


Kurve 1.
Einfluß der Permeabilität auf die Zeitkonstante.
Diamagnet. und paramagnetische Metallbleche für $1 - \mu = \pm 10^{-5}$.

1) Phil. Mag. May 1886, S. 381.

sprechend dem Umstande, daß bei sehr großer Schwingungszahl der Strom merklich nur in unmittelbarer Nähe der Oberfläche fließt.

In jenen Fällen, wo die Genauigkeit der Gleichungen (24) und (25) nicht eine genügende ist, müssen wir uns der genauen Formel (21) bedienen, indem wir zunächst die Größen



Kurve 2.
Die Zeitkonstante eines Bleches als Funktion des Argumentes $2h\delta$.
Breite $\lambda = \infty$. Schnellere Schwingungen.

$$(\mathfrak{Sin}\, x - \sin x), \quad (\mathfrak{Sin}\, x + \sin x) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{Cof}\, x + \cos x)$$

getrennt berechnen, z. B. mit Hilfe von Tafeln der hyperbolischen und der trigonometrischen Funktionen.

Aus Tafel I ersieht man leicht, wie groß die Gültigkeitsbereiche der beiden Annäherungsformeln (24) und (28) sind.

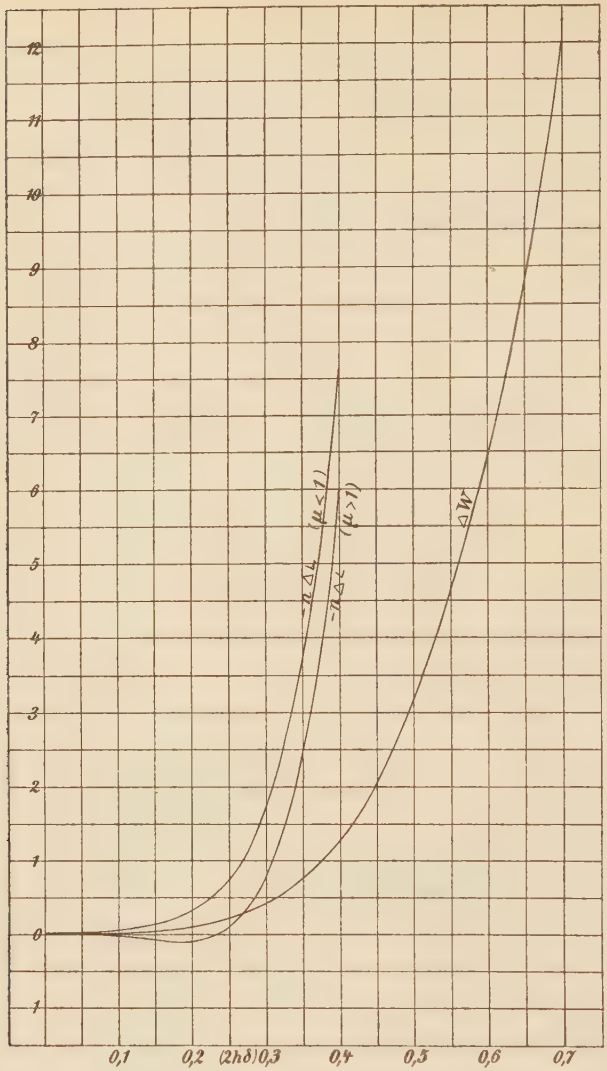
Für $2h\delta < 1$ ist nämlich die Formel (24) praktisch genau, anderseits aber zeigt sich die Formel (28) erst für $2h\delta >$ etwa 7,5 als genügend.

Ferner sind die Werte des Gliedes mit dem Faktor $\frac{1-\mu}{\mu}$, welches in der Gleichung (24) steht, unter den zwei Annahmen $1 - \mu = 10^{-4}$

Tafel I.

Berechnung der Zeitkonstante für ein Blech.

$2h\delta$	$\frac{(2h\delta)^2}{5}\left(1-\frac{(2h\delta)^4}{1890}\right)$	Korrektionsglied		$n\tau$, Formel (24)		Formel (28) $\frac{2h\delta}{\mu}-1$	$n\tau$. Genaue Werte Formel (21)	
		$1-\mu=10^{-4}$	$1-\mu=10^{-5}$	$1-\mu=10^{-4}$	$1-\mu=10^{-5}$	$1-\mu=10^{-4}$	$1-\mu=10^{-4}$	$1-\mu=10^{-5}$
0,2	0,0080	0,0150	0,0015	0,0230	0,0095		0,0230	0,0095
0,4	0,0320	0,0038	0,0004	0,0358	0,0324		0,0358	0,0324
0,6	0,0720	0,0017	0,0002	0,0737	0,0722		0,0737	0,0722
0,8	0,1280	0,0010	0,0001	0,1290	0,1281		0,1290	0,1281
1,0	0,1999	0,0006	0,0001	0,2005	0,2000	0,0001	0,2005	0,2000
1,2	0,2884	0,0004	0,0000	0,2888	0,2884	0,2001	0,2875	0,2875
1,4	0,3928	0,0003		0,3931	0,3928	0,4001		
1,6	0,5138	0,0002		0,5140	0,5138	0,6002	0,5082	0,5081
1,8	0,6516	0,0002		0,6518	0,6516	0,8002	0,6394	0,6393
2,0	0,8069	0,0001		0,8070	0,8069	1,0002	0,7698	0,7697
3,0						2,000	1,729	1,729
4,0						3,000	2,855	2,855
5,0						4,000	3,981	3,981
6,0						5,001	5,023	5,023
7,0						6,001	6,018	6,017
8,0						7,001	7,007	7,006
9,0						8,001	8,000	7,999
10.0						9,001	9,000	8,999



Kurve 3.
Diamagnetische und paramagnetische Metallbleche.
ΔW und $(-n\Delta L)$ als Funktion von $2h\delta$.
(Der Maßstab der Ordinaten ist willkürlich gewählt worden.)
$1-\mu = \pm 10^{-4}$.
NB. Mit $1-\mu$ negativ ist $-n\Delta L$ für kleines Argument auch negativ.

und $1-\mu = 10^{-5}$ berechnet worden und in die dritten und vierten Kolonnen der Tafel gebracht. Wenn auch dieses Glied bei sehr kleinen Werten von $2h\delta$ ganz beträchtlich ist, so nimmt es doch mit steigenden $2h\delta$ sehr rasch ab, und ist für $2h\delta = 1$ fast zu vernachlässigen. Bei größeren Werten von $1-\mu$, wie sie einige der Metalle zeigen, ist ein entsprechend größerer Effekt zu erwarten. In den Kurven 1 und 2 ist der Verlauf der Größe $n\tau$ als Funktion vom Argumente $2h\delta$ gezeichnet. Ferner ist auch das Korrektionsglied, welches von $\frac{1-\mu}{\mu}$ abhängt, und das Hauptglied $f(2h\delta)$ getrennt berechnet, um ihre relative Größe deutlich zu machen. Aus Kurve 3 ist der Einfluß der Permeabilität auf $\triangle W$ und $-n\triangle L$ ersichtlich.

II. Kapitel.

Berechnung der Korrektion beim Blech wegen der endlichen Breite.

Um eine Korrektion für die endliche Breite der in der Praxis vorkommenden Stäbe zu berechnen, wollen wir von den von Herrn Debye für beliebige Seitenlängen des Querschnitts abgeleiteten Gleichungen ausgehen. Der in Kapitel I behandelte Grenzfall soll dabei als Kontrolle dienen.

Das elektrische und magnetische Feld.

Bei beliebigen Seitenlängen 2δ, 2λ des rechteckigen Querschnittes hat das magnetische Feld in jedem Augenblicke die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial y^2} + \varkappa^2 \mathfrak{H} = 0 \tag{30}$$

zu befriedigen mit den Randbedingungen

$$\mathfrak{H} = \Re[He^{int}] \quad \text{für} \quad x = \pm\delta, \quad y = \pm\lambda.$$

Wie im vorigen Fall ist

$$\varkappa^2 = -4\pi\sigma n\mu i = -2h^2 i.$$

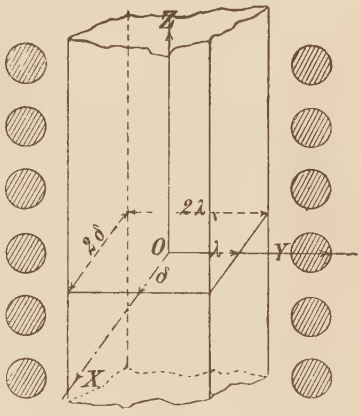


Fig. 2.

Setzen wir $\mathfrak{H} = XY$, wo X eine Funktion von x allein, Y eine Funktion von y allein bedeuten soll, in Gleichung (30) ein, so ergibt sich für die Bestimmung dieser Hilfsgrößen

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \beta^2 X = 0$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \alpha^2 Y = 0$$

mit der Nebenbedingung

$$\varkappa^2 = \alpha^2 + \beta^2. \tag{31}$$

Folglich haben wir als partikuläre Lösungen

$$X = \sin\beta x, \quad \cos\beta x,$$

$$Y = \sin\alpha y, \quad \cos\alpha y.$$

Wir schreiben jetzt nach Herrn Debye

$$\mathfrak{H} = \Re[e^{int}(u_1 + u_2)] \tag{32}$$

und bestimmen diese letzten Größen so, daß

(a) $$u_1 = 0 \quad \text{für} \quad x = \pm\,\delta,$$

(b) $$u_1 = H \quad \text{für} \quad y = \pm\,\lambda,$$

(c) $$u_2 = H \quad \text{für} \quad x = \pm\,\delta,$$

(d) $$u_2 = 0 \quad \text{für} \quad y = \pm\,\lambda.$$

Die Bedingung (a) erfüllen wir durch

$$u_1 = \sum\nolimits_m A_m \cos\frac{m\pi}{2\delta}\,x\,\cos\alpha_m y, \qquad m = 1, 3, 5\cdots,$$

wo

$$\alpha_m^2 = \varkappa^2 - \beta_m^2 = \varkappa^2 - \frac{m^2\pi^2}{4\delta^2}$$

vgl. Gleichung (31), d. h.

$$\alpha_m = \frac{1}{\delta}\sqrt{(\varkappa\delta)^2 - \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2}.$$

Um auch die zweite Bedingung (b) zu befriedigen, schreiben wir

$$u_1 = \sum\nolimits_m a_m \cos\frac{m\pi}{2\delta}\,x\,\frac{\cos\alpha_m y}{\cos\alpha_m\lambda}, \qquad \text{wo } m = 1, 3, 5,$$

und finden die Koeffizienten a_m in eindeutiger Weise, indem wir die Konstante H zwischen $x = -\delta$ und $x = +\delta$ in eine Fouriersche Reihe nach den ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi x}{2\delta}$ entwickeln.

Demnach ist

$$(32)\quad u_1 = \frac{4H}{\pi}\left[\frac{\cos\frac{s_1 y}{\delta}}{\cos\frac{s_1\lambda}{\delta}}\cos\frac{\pi x}{2\delta} - \tfrac{1}{3}\frac{\cos\frac{s_3 y}{\delta}}{\cos\frac{s_3\lambda}{\delta}}\cos\frac{3\pi x}{2\delta} + \tfrac{1}{5}\frac{\cos\frac{s_5 y}{\delta}}{\cos\frac{s_5\lambda}{\delta}}\cos\frac{5\pi x}{2\delta} - \cdots\right]$$

und ebenso

$$(33)\quad u_2 = \frac{4H}{\pi}\left[\frac{\cos\frac{t_1 x}{\lambda}}{\cos\frac{t_1\delta}{\lambda}}\cos\frac{\pi y}{2\lambda} - \tfrac{1}{3}\frac{\cos\frac{t_3 x}{\lambda}}{\cos\frac{t_3\delta}{\lambda}}\cos\frac{3\pi y}{2\lambda} + \tfrac{1}{5}\frac{\cos\frac{t_5 x}{\lambda}}{\cos\frac{t_5\delta}{\lambda}}\cos\frac{5\pi y}{2\lambda} - \cdots\right],$$

wo

$$(34)\quad \begin{aligned} s_m &= \sqrt{\varkappa^2\delta^2 - \frac{m^2\pi^2}{4}} = \sqrt{-2h^2\delta^2 i - \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2} \\ t_m &= \sqrt{\varkappa^2\lambda^2 - \frac{m^2\pi^2}{4}} = \sqrt{-2h^2\lambda^2 i - \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2}, \end{aligned}$$

wie bereits von Herrn Debye gefunden wurde.

An der Oberfläche ist das magnetische Feld überall nach der z-Achse gerichtet, und folglich ist das elektrische Feld durch

$$(35)\quad \mathfrak{E}_x = \frac{1}{4\pi\sigma}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_y = -\frac{1}{4\pi\sigma}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial x}$$

gegeben.

Die Energie des Feldes.

Aus Fig. 3 ist ersichtlich, daß der für den Energiefluß maßgebende Vektor $\mathfrak{S}_n$ auf den Flächen 1, 2, 3, 4 der Oberfläche folgende Werte hat:

Auf 1 $4\pi\mathfrak{S}_n = +(\mathfrak{E}_y\mathfrak{H})_{x=\delta}$

„ 2 $4\pi\mathfrak{S}_n = -(\mathfrak{E}_y\mathfrak{H})_{x=-\delta}$

„ 3 $4\pi\mathfrak{S}_n = -(\mathfrak{E}_x\mathfrak{H})_{y=\lambda}$

„ 4 $4\pi\mathfrak{S}_n = +(\mathfrak{E}_x\mathfrak{H})_{y=-\lambda}$.

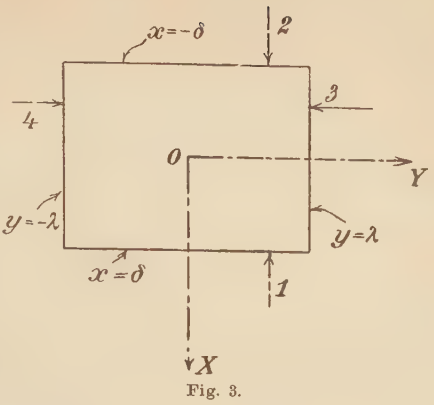


Fig. 3.

Die dem elektromagnetischen Felde entzogene Energie pro Längeneinheit des Stabes ist also

$$Q + \dot{M} = -\int_\sigma \mathfrak{S}_n\, d\sigma = \frac{1}{4\pi}\left[\int_{-\delta}^{\delta} (\mathfrak{E}_x\mathfrak{H})_{y=-\lambda}^{y=\lambda}\, dx - \int_{-\lambda}^{\lambda} (\mathfrak{E}_y\mathfrak{H})_{x=-\delta}^{x=\delta}\, dy\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{4\pi\sigma}\left[\int_{-\delta}^{\delta}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial y}\cdot\mathfrak{H}\right)_{y=\lambda} dx + \int_{-\lambda}^{\lambda}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial x}\cdot\mathfrak{H}\right)_{x=\delta} dy\right]$$

$$= \frac{H\cos nt}{8\pi^2\sigma}\left[\int_{-\delta}^{\delta}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial y}\right)_{y=\lambda} dx + \int_{-\lambda}^{\lambda}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial x}\right)_{x=\delta} dy\right].$$

Die Größen $\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial y}\right)_{y=\lambda}$ und $\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial x}\right)_{x=\delta}$ sind ohne Schwierigkeit aus den Gleichungen (32), (33) und (34) zu berechnen, und es ergibt sich endlich mit den Abkürzungen S und T:

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} Q + \dot{M} = -\frac{2H^2\cos nt}{\pi^4\sigma}\,\Re\cdot e^{int}\Bigg[&\sum_{1,3,5\cdots}^{m} \frac{\left(\frac{s_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{s_m}\,\operatorname{tg} s_m\frac{\lambda}{\delta} \\ &+ \sum_{1,3,5\cdots}^{m} \frac{\left(\frac{t_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{t_m}\,\operatorname{tg} t_m\frac{\delta}{\lambda}\Bigg] \end{aligned}\right.$$

$$(36a)\qquad = -\frac{2H^2\cos nt}{\pi^4\sigma}\,\Re\cdot e^{int}(S+T),$$

ein Ausdruck, der ganz ähnlich lautet wie der von Herrn Debye gebildete Mittelwert Q_m.

Folglich nach (8)

$$(37)\quad \Delta(Q+\dot{M}) = -\frac{2H^2\cos nt}{\pi^4\sigma}\,\Re\cdot e^{int}(S+T) + \frac{H^2 n\delta\lambda}{\pi}\cos nt\sin nt\cdot$$

Die beiden Ausdrücke S und T wollen wir getrennt behandeln, und zwar für die Fälle

(1) $2h\delta$ klein, $2h\lambda$ groß, $\frac{\delta}{\lambda}$ klein,

(2) $2h\delta$ klein, $2h\lambda$ klein, $\frac{\delta}{\lambda}$ klein,

(3) $2h\delta$ groß, $2h\lambda$ groß, $\frac{\delta}{\lambda}$ klein,

Fall 1. Mäßig schnelle Schwingungen

$2h\delta$ *klein*, $2h\lambda$ *groß*, $\frac{\delta}{\lambda}$ *klein*.

Es war

$$S = \sum_m \frac{\left(\frac{s_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{s_m} \operatorname{tg} s_m \frac{\delta}{\lambda}, \qquad m = 1, 3, 5 \cdots,$$

wo

$$s_m = \sqrt{-2h^2\delta^2 i - \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2},$$

und daher

(38a) $$\left(\frac{s_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = -i\frac{2h^2\delta^2}{m^2}$$

(38b) $$\operatorname{tg}\left(s_m \frac{\lambda}{\delta}\right) = \operatorname{tg}\left(\sqrt{-2h^2\lambda^2 i - \left(\frac{m\pi\lambda}{2\delta}\right)^2}\right).$$

Dieser Ausdruck hat die Form $\operatorname{tg}[\pm(-b+ai)]$, wo das Vorzeichen von $(-b+ai)$ an sich unbestimmt ist und z. B. so gewählt sein möge, daß $a > 0$ wird. Demnach stellt Gleichung (38b) die Tangensfunktion eines komplexen Arguments dar, dessen beide Bestandteile groß sind, und dessen imaginäre Komponente mit steigendem m ins Unendliche wächst. Da allgemein

$$\operatorname{tg}(-b+ai) = i\frac{(1 - e^{-2a}e^{-2ib})}{(1 + e^{-2a}e^{-2ib})},$$

so sind, wenn wir $\operatorname{tg}\left(s_m \frac{\lambda}{\delta}\right) = +i$ setzen, nur Glieder von der Ordnung e^{-2a} vernachlässigt. Demnach lautet unsere Gleichung für S in hinreichender Näherung:

$$S = 2h^2\delta^2 \sum_m \frac{1}{m^2 s_m}. \qquad m = 1, 3, 5 \cdots$$

Unter der Voraussetzung, daß $2h\delta$ klein ist, dürfen wir s_m in eine Reihe nach Potenzen von $\frac{2h\delta}{m\pi}$ entwickeln, nämlich

$$s_m = \pm i\frac{m\pi}{2}\left[1 + i\left(\frac{2h\delta}{m\pi}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{2h\delta}{m\pi}\right)^4 + \cdots\right],$$

wobei wir das Vorzeichen so bestimmen müssen, daß s_m in demselben Quadranten der komplexen Ebene wie $s_m \frac{\lambda}{\delta}$ liegt. So wird

$$(39)\quad S = -i\frac{(2h\delta)^2}{\pi}\left[\sum_1^\infty \frac{1}{(2n+1)^3} - i\frac{(2h\delta)^2}{\pi^2}\sum_1^\infty \frac{1}{(2n+1)^5} - \frac{3}{2}\frac{(2h\delta)^4}{\pi^4}\sum_1^\infty \frac{1}{(2n+1)^7}\right].$$

Bei dem Glied T können wir nicht so einfach verfahren. Es war

$$T = \sum_{1,3,5\cdots}^m \frac{\left(\frac{t_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{t_m} \operatorname{tg}\left(t_m \frac{\delta}{\lambda}\right),$$

wo

$$t_m = \sqrt{-2h^2\lambda^2 i - \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2}.$$

Aus den Gleichungen (38a) und (38b) finden wir mit Vertauschung von δ und λ

$$\left(\frac{t_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = -i\frac{2h^2\lambda^2}{m^2}$$

$$t_m \frac{\delta}{\lambda} = \sqrt{-2h^2\delta^2 i - \left(\frac{m\pi\delta}{2\lambda}\right)^2}.$$

Die Entwicklung von t_m und $t_m \frac{\delta}{\lambda}$ in Reihen ist aber nicht gestattet Die einzelnen Glieder sind allerdings für kleine Werte von m auch klein, für große Werte von m aber sehr groß, und die Reihen konvergieren für keinen Wert von λ.

Setzen wir, der Kürze halber, $r_m = t_m \frac{\delta}{\lambda}$, so wird

$$(40)\quad T = -2ih^2\lambda^2 \sum_{1,3,5\cdots}^m \frac{1}{m^2}\frac{\delta}{\lambda r_m} \operatorname{tg} r_m = -2h^2\lambda\delta i \sum_{1,3,5\cdots}^m \frac{1}{m^2}\frac{\operatorname{tg} r_m}{r_m}.$$

Zunächst suchen wir den Grenzwert T_∞ dieses Ausdrucks für $\lambda = \infty$ auf und zeigen, daß er den Wert von $\triangle(Q+M)_{\lambda=\infty}$ mit dem Wert (19) des vorigen § identisch gibt. Für $\lambda = \infty$ geht r_m in $r = \pm h\delta(1-i)$ über, und $\operatorname{tg} r_m$ gibt einfach, indem wir das r positiv wählen,

$$\operatorname{tg} r = \frac{\sin 2h\delta - i\operatorname{Sin} 2h\delta}{\operatorname{Cof} 2h\delta + \cos 2h\delta}.$$

Infolgedessen haben wir als Grenzwert für T

$$T_\infty = h\lambda(1-i)\frac{\sin 2h\delta - i\operatorname{Sin} 2h\delta}{\operatorname{Cof} 2h\delta + \cos 2h\delta}\sum_{1,3,5\cdots}^m \frac{1}{m^2},$$

$\sum_{1,3,5\cdots}^m \frac{1}{m^2}$ ist aber bekanntlich $= \frac{\pi^2}{8}$.

Demnach ist endlich

$$T_\infty = -\frac{\pi^2 h\lambda}{8}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,2h\delta - \sin 2h\delta}{\mathfrak{Cof}\,2h\delta + \cos 2h\delta} + i\,\frac{\mathfrak{Sin}\,2h\delta + \sin 2h\delta}{\mathfrak{Cof}\,2h\delta + \cos 2h\delta}\right].$$

Im Verhältnis hierzu ist der Ausdruck S in der Grenze zu vernachlässigen, da er für $\lambda = \infty$ endlich bleibt. Dementsprechend bekommen wir aus der Gleichung (8)

$$\triangle(Q + \dot{M})_{\lambda=\infty} = \frac{H^2\lambda h}{4\pi^2\sigma}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,2h\delta - \sin 2h\delta}{\mathfrak{Cof}\,2h\delta + \cos 2h\delta}\right)\cos^2 nt$$
$$+\left(\frac{nH^2 h\delta}{\pi} - \frac{H^2\lambda h}{4\pi^2\sigma}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,2h\delta + \sin 2h\delta}{\mathfrak{Cof}\,2h\delta + \cos 2h\delta}\right)\cos nt \sin nt,$$

d. h. genau dieselbe Gleichung wie (19), welche wir vorher für $\lambda = \infty$ gefunden haben.

Zu einer genaueren Berechnung kommen wir, wenn wir neben dem mit λ unendlich groß werdenden T_∞ die mit λ endlich bleibenden Größen $(T - T_\infty)$ und S beibehalten. Deshalb wollen wir zunächst $T_0 = (T - T_\infty)$ näher betrachten.

Aus der Gleichung (40) ist deutlich

$$T_0 = -2h^2\lambda\delta i\sum_m \frac{1}{m^2}\left(\frac{\operatorname{tg} r_m}{r_m} - \frac{\operatorname{tg} r}{r}\right), \tag{41}$$

wo

$$r_m^2 = -2h^2\delta^2 i - \left(\frac{m\pi\delta}{2\lambda}\right)^2 = -2h^2\delta^2 i - z_m^2. \tag{42}$$

Wir zerlegen mit Herrn Debye (l. c.) $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ in eine Summe von Partialbrüchen:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 2\sum_0^\infty{}_n \frac{1}{\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2 - x^2}$$

und bekommen aus Gleichung (41)

$$\left\{\begin{aligned} T_0 &= -2h^2\lambda^2\delta i\sum_{1,3,5\cdots}{}_m \frac{1}{m^2}\sum_0^\infty{}_n 2\left(\frac{1}{\varrho_n^2 + z_m^2} - \frac{1}{\varrho_n^2}\right) \\ &= 4h^2\lambda\delta i\sum_0^\infty{}_n \sum_{1,3,5\cdots}{}_m \frac{z_m^2}{m^2\varrho_n^2}\left(\frac{1}{\varrho_n^2 + z_m^2}\right), \end{aligned}\right. \tag{43}$$

wo

$$\varrho_n^2 = \left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2 + 2ih^2\delta^2. \tag{44}$$

Da m ungerade ist, so ist ersichtlich, daß die gemeinsame Differenz zwischen je zwei aufeinander folgenden Werten von z_m beträgt

$$\triangle z_m = 2\frac{\pi\delta}{2\lambda} = \frac{\pi\delta}{\lambda},$$

und aus (42)

$$m^2 = \frac{4\lambda^2 z_m^2}{\pi^2 \delta^2}.$$

Mit unendlich wachsendem λ nimmt $\triangle z_m$ unendlich ab, so daß die Summe in Gleichung (43) in ein Integral übergeht, indem wir einfach $dz = \frac{\pi\delta}{\lambda}$ schreiben. Wir können die Summe folglich so umformen

$$T_0 = \pi h^2 \delta^2 i \sum_0^\infty{}^n \sum_{1,3,5,\ldots}^m \frac{1}{\varrho_n^2} \left(\frac{\pi\delta}{\lambda}\right) \frac{1}{\varrho_n^2 + z_m^2} = T_1 + T_2,$$

wo

$$T_1 = \pi h^2 \delta^2 i \sum_0^\infty{}^n \frac{1}{\varrho_n^3} \int_0^\infty \frac{\frac{dz}{\varrho_n}}{1 + \frac{z^2}{\varrho_n^2}}$$

und

$$T_2 = \pi h^2 \delta^2 i \sum_0^\infty{}^n \frac{1}{\varrho_n^3} \left\{ \sum_{1,3,5,\ldots}^m \frac{\left(\frac{\pi\delta}{\lambda\varrho_n}\right)}{1 + \frac{z_m^2}{\varrho_n^2}} - \int_0^\infty \frac{\frac{dz}{\varrho_n}}{1 + \frac{z^2}{\varrho_n^2}} \right\}.$$

Der Wert von T_1 läßt sich unmittelbar finden. Es ist nämlich

$$T_1 = \frac{\pi^2 h^2 \delta^2 i}{2} \sum_0^\infty{}^n \frac{1}{\varrho_n^3},$$

und indem wir ϱ_n^3 nach Potenzen der kleinen Größe $2h\delta$ entwickeln, ergibt sich endlich

$$(45) \quad \left\{ T_1 = i\frac{(2h\delta)^2}{\pi} \left[\sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^3} - i \cdot \frac{3(2h\delta)^2}{\pi^2} \sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^5} - \frac{15}{2} \frac{(2h\delta)^4}{\pi^4} \sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^7} \right] \right.$$

Um sodann die Differenz T_2 zwischen der endlichen Summe und dem Integrale derselben Funktion zu finden, bedienen wir uns des Euler-Maclaurinschen Satzes. Dieser lautet

$$\sum_0^p{}^\nu k \cdot f(a + \nu k) - \int_a^{a+pk} f(z)\,dz = -\frac{k}{2}[f(a+pk) - f(a)]$$
$$+ \frac{B_1}{2!} k^2 [f'(a+pk) - f'(a)] - \frac{B_2}{4!} k^4 [f'''(a+pk) - f'''(a)] + \cdots + R,$$

wo $B_1, B_2, \ldots$ die sogenannten Bernouillischen Zahlen, und R ein Restglied bedeuten.

In der Gleichung für T_2 haben wir zu setzen:

$$f(z) = \frac{1}{1 + \frac{z^2}{\varrho_n^2}}, \quad a + pk = \infty, \quad a = 0, \quad k = \frac{\pi\delta}{\lambda\varrho_n}.$$

Da aber $f(z)$ eine gerade Funktion ist, so müssen in ihrer Taylorschen Entwicklung sämtliche Glieder in z^{2n+1} fehlen, d. h. jeder Differentialquotient von ungerader Ordnung muß Null sein. Demnach hört die Reihe mit dem ersten Glied auf, indem wir das Restglied vernachlässigen.

Da ferner

$$f(\infty) = 0 \quad \text{und} \quad f(0) = 1,$$

so folgt, daß

$$T_2 = \pi h^2 \delta^2 i \sum_0^\infty{}^n \frac{1}{\varrho_n^3}\left(-\frac{\pi\delta}{2\lambda\varrho_n}\right)(-1) = i\frac{\pi^2 h^2 \delta^3}{2\lambda} \sum_0^\infty{}^n \frac{1}{\varrho_n^4}.$$

Durch Einsetzen des Wertes von ϱ_n (Gleichung (44)), und durch Entwicklung nach steigenden Potenzen von $2h\delta$ ergibt sich endlich

$$(46) \quad \begin{cases} T_2 = 2i\frac{(2h\delta)^2}{\pi^2} \cdot \frac{\delta}{\lambda}\Big[\sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^4} - 4i\frac{(2h\delta)^2}{\pi^2}\sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^6} \\ \qquad\qquad - 12\frac{(2h\delta)^4}{\pi^4}\sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^8}\Big]. \end{cases}$$

Nun gilt bekanntlich

$$(47) \quad \begin{cases} \sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \qquad \sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^8} = \frac{17\pi^8}{32 \cdot 7!}, \\ \sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}. \end{cases}$$

Leider gibt es für $\sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^m}$, wo m ungerade ist, keinen einfachen Ausdruck. Die numerischen Werte sind aber leicht mit einer für diesen Fall genügenden Genauigkeit zu erhalten.

Jetzt sind wir imstande, die korrigierten Werte von $\triangle W$ und $\triangle L$ zu finden, ausgehend von

$$(Q + \dot{M}) = -\frac{2H^2 \cos nt}{\pi^4 \sigma} R \cdot e^{jnt}(T_\infty + S + T_1 + T_2).$$

Das erste Glied der Klammer ist schon in Gleichung (19) berechnet worden. Die Summe der letzten drei ist nach (39), (45) und (46)

$$S + T_1 + T_2 = \frac{2(2h\delta)^4}{\pi^3}\left[\sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^5} + \frac{4}{\pi}\frac{\delta}{\lambda}\sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^6} + \cdots\right]$$

$$+ i \cdot \frac{2(2h\delta)^2}{\pi^2}\left[\frac{\delta}{\lambda}\sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{3(2h\delta)^4}{\pi^3}\sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^7} + \cdots\right].$$

Folglich liefert die Zerlegung in reellen und imaginären Teil

$$(48)\quad \begin{cases} \triangle(Q + \dot{M}) = \dfrac{H^2 h\lambda}{4\pi^2\sigma}\left[\dfrac{\mathfrak{Sin}\,2h\delta - \sin 2h\delta}{\mathfrak{Cof}\,2h\delta - \cos 2h\delta} - 32\frac{\delta}{\lambda}\frac{(2h\delta)^3}{\pi^5}\sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^5}\right. \\ \qquad \left. + 128\frac{\delta^2}{\lambda^2}\frac{(2h\delta)^3}{\pi^6}\sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^6}\right]\cos^2 nt \\ \quad - \dfrac{H^2 h\lambda}{4\pi^2\sigma}\left[\dfrac{\mathfrak{Sin}\,2h\delta + \sin 2h\delta}{\mathfrak{Cof}\,2h\delta + \cos 2h\delta} - \frac{4\pi n\sigma\delta}{h} - 32\frac{\delta^2}{\lambda^2}\frac{(2h\delta)}{\pi^4}\sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^4}\right. \\ \qquad \left. + 96\frac{\delta}{\lambda}\frac{(2h\delta)^5}{\pi^7}\sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^7}\right]\sin nt\cos nt. \end{cases}$$

Folglich mit Rücksicht auf die Gleichungen (4) und (48), indem wir $\frac{\delta}{\lambda} = \alpha$ setzen.

$$(49)\quad \begin{cases} \triangle W = \dfrac{4\lambda h N^2}{\sigma}\left[\dfrac{\mathfrak{Sin}\,2h\delta - \sin 2h\delta}{\mathfrak{Cof}\,2h\delta - \cos 2h\delta} - 32\alpha\frac{(2h\delta)^3}{\pi^5}\sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^5}\right. \\ \qquad \left. + 128\alpha\frac{(2h\delta)^3}{\pi^6}\sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^6}\right] \\ \quad = \dfrac{2N^2}{\sigma}(2h\lambda)\left[\dfrac{\mathfrak{Sin}\,2h\delta - \sin 2h\delta}{\mathfrak{Cof}\,2h\delta + \cos 2h\delta} - 0{,}1045(2h\delta)^3\alpha\right. \\ \qquad \left. + \frac{2}{15}(2h\delta)^3\alpha^2\right]. \end{cases}$$

$$(50)\quad \begin{cases} -n\triangle L = -\dfrac{2N^2}{\sigma}(2h\lambda)\left[\dfrac{\mathfrak{Sin}\,2h\delta + \sin 2h\delta}{\mathfrak{Cof}\,2h\delta + \cos 2h\delta} - \frac{4\pi n\sigma\delta}{h}\right. \\ \qquad \left. - 32\alpha^2\frac{(2h\delta)}{\pi^4}\sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{96\alpha}{\pi^7}(2h\delta)^5\sum_0^\infty{}^n \frac{1}{(2n+1)^7}\right] \\ \quad = \dfrac{2N^2}{\sigma}(2h\lambda)\left[\frac{4\pi n\sigma\delta}{h} - \dfrac{\mathfrak{Sin}\,2h\delta + \sin 2h\delta}{\mathfrak{Cof}\,2h\delta + \cos 2h\delta} + \frac{\alpha^2}{3}(2h\delta)\right. \\ \qquad \left. - 0{,}0318\,(2h\delta)^5\alpha\right]. \end{cases}$$

Wie schon im Grenzfall geschehen ist, wollen wir diese Gleichungen nach Potenzen von $2h\delta = x$ entwickeln. Hieraus finden wir endlich

$$(51)\qquad \begin{cases} \triangle W = \dfrac{2N^2(2h\lambda)}{\sigma}\dfrac{x^3}{3!}\left[1 - 0{,}627\alpha + 0{,}800\alpha^2 - \dfrac{17}{420}x^4 + \cdots\right] \\ -n\triangle L = \dfrac{2N^2(2h\lambda)}{\sigma}\,x\left[\dfrac{(1-\mu)}{\mu} + \dfrac{\alpha^2}{3} + \dfrac{x^4}{30}(1 - 0{,}954\alpha) + \cdots\right]. \end{cases}$$

Die Korrektion für die Zeitkonstante $n\tau$ findet man am bequemsten, indem man zunächst die Korrektionen zu $\triangle W$ und $-n\triangle L$ berechnet und den Quotienten beider bildet.

Numerisches Beispiel.

Nehmen wir als Material Kupfer an ($\sigma = 6 \cdot 10^{-4}$) und setzen wir $\delta = 0{,}1$ cm, $x = 2h\delta = 0{,}5$ voraus. Dem entspricht die Schwingungszahl 264 pro Sekunde. Für Kupfer ist $(1 - \mu) =$ etwa 10^{-5}. Die Werte der Korrektionen sind für verschiedene Werte von α berechnet und in die folgende Tafel gebracht worden, in der die letzte Kolonne die Werte der Klammern in $-n\triangle L$ und $\triangle W$ enthalten, die verschiedenen Werten von α entsprechen, und die ersten Kolonnen die Werte der Korrektionsglieder, aus denen sich diese Summe zusammensetzt.

Tafel II.

Berechnung von $(-n\triangle L)$

α	$\frac{\alpha^2}{3}$	$(1 - 0{,}954\alpha)$	$\frac{x^4}{30}(1 - 0{,}954\alpha)$	Summe
0,2	0,01333	0,809	0,00168	0,01502
0,1	0,00333	0,905	0,00188	0,00522
0,05	0,00083	0,952	0,00198	0,00282
0,025	0,00021	0,971	0,00202	0,00224
0,01	0,00003	0,988	0,00206	0,00210
0,001	0,00000	0,999	0,00208	0,00209
0,000	0,00000	1,000	0,00208	0,00209

Berechnung von $\triangle W$

α	$-0{,}627\alpha$	$0{,}800\alpha^2$	$-0{,}627\alpha + 0{,}800\alpha^2$	Summe
0,2	— 0,1254	0,0320	— 0,0934	0,9041
0,1	0,0627	0,0080	— 0,0547	0,9428
0,05	0,0314	0,0020	— 0,0294	0,9681
0,025	0,0157	0,0005	— 0,0152	0,9823
0,01	0,0063	0,0001	— 0,0062	0,9913
0,001	0,0006	0,0000	— 0,0006	0,9969
0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,9975

Aus dem ersten Teil der Tafel ist leicht ersichtlich, daß bei einem Stabe eines unmagnetischen Metalls die eben abgeleitete Summe $(S + T_1 + T_2)$

für den Ausdruck von $\triangle L$ keineswegs als Korrektionsglied, sondern als ein in vielen Fällen erheblicher Teil des ganzen Wertes anzusehen ist. In der Tat ist der vollständige Wert von dem Werte im Grenzfalle $\alpha = 0$ (letzte Zeile der letzten Kolonne) zum Teil erheblich verschieden. Im obigen Fall, selbst mit einem Seitenverhältnis α des Querschnittes von nur 0,01 ist die Differenz merkbar, und bei steigendem α nimmt sie rasch zu, so daß sie für $\alpha = 0{,}1$ schon größer als der Wert für $\alpha = 0$ geworden ist. Die Erklärung dieser Tatsache ist in der Geringfügigkeit von $(1 - \mu)$ bei unmagnetischen Metallen und der damit zusammenhängenden Kleinheit von $\triangle L$ zu suchen. Was die magnetische Energie betrifft, so ist es beinahe gleich, ob ein Raumteil mit Kupfer oder mit Luft gefüllt ist. Die Selbstinduktionsverminderung der Spule bei Einführung des Stabes ist überhaupt sehr klein und hängt ganz wesentlich von der Stromverteilung im Querschnitt des Stabes ab.

Anders liegt die Sache bei magnetischen Metallen mit ihren unverhältnismäßig größeren Permeabilitäten. Für diesen Fall aber gilt die obige Entwicklung nicht mehr, weil $2h\delta$ jetzt größer als 1 ist.

Fall 2. Sehr langsame Schwingungen.

$2h\delta$ klein, $2h\lambda$ ebenfalls klein, $\frac{\lambda}{\delta}$ groß.

Für s_m haben wir dieselbe Entwicklung wie im vorigen Fall. Wie zuvor ist $\operatorname{tg} s_m \frac{\lambda}{\delta} = +i$ zu setzen. Das Argument $\sqrt{-2h^2\lambda^2 i - \left(\frac{m\pi\lambda}{2\delta}\right)^2}$ ist wiederum groß, allerdings nicht wie im vorigen Fall wegen der Größe von $2h\lambda$, sondern wegen der Voraussetzung eines großen $\frac{\lambda}{\delta}$, so daß die obige Annäherung eine genügende ist. Folglich gilt für S genau dieselbe Formel wie im vorigen Fall.

Daß auch für T dieselben Entwicklungen Gültigkeit behalten wie vorher, folgt einfach daraus, daß hierbei die Größe von $2h\lambda$, in der sich der jetzige von dem früheren Fall allein unterscheidet, ohne Einfluß ist. Folglich berechnen sich auch in diesem Falle 2. die Größen $\triangle L$ und $\triangle W$ mittels der Gleichungen (49), (50) und (51).

Fall 3. Schnelle Schwingungen.

Die drei Größen $2h\lambda$, $2h\delta$ und $\frac{\lambda}{\delta}$ sind als groß vorauszusetzen.

Jetzt ist nicht nur das Argument $s_m \frac{\lambda}{\delta}$, sondern auch $t_m \frac{\delta}{\lambda}$ groß, und folglich dürfen wir auch $\operatorname{tg} t_m \frac{\delta}{\lambda} = +i$ setzen, und die Gleichungen für S und T werden einfach

$$S = 2h^2\delta^2 \sum\nolimits_m \frac{1}{m^2 s_m} \tag{52}$$

$m = 1, 3, 5 \ldots$

$$T = 2h^2\lambda^2 \sum\nolimits_m \frac{1}{m_2 t_m}. \tag{53}$$

Wegen der Größe von $2h\delta$ und $2h\lambda$ konvergieren die Entwicklungen für s_m und t_m durchaus nicht, und wir müssen wie im ersten Fall bei der T-Reihe verfahren.

Im Grenzfall $\lambda = \infty$ ist $t_m = t = -h\lambda(1-i)$, wobei das Vorzeichen dadurch bestimmt ist, daß wir oben $\operatorname{tg} t_m \frac{\delta}{\lambda}$ gleich $+i$ gesetzt, oder, was dasselbe bedeutet, daß wir t_m im zweiten Quadranten der komplexen Ebene gewählt haben.

Folglich

$$T_\infty = -\frac{\pi^2 h\lambda}{8}(1+i). \tag{54}$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in die Gleichung (36) bekommen wir leicht die früheren für unendliche Breite und für schnelle Schwingungen gültigen Gleichungen (26), (27) und (28).

Betrachten wir sodann die Größe $T_0 = T - T_\infty$. Es ist

$$T_0 = 2h^2\lambda^2 \sum_{1,3,5,\ldots}^{m} \frac{1}{m^2}\left(\frac{1}{t_m} - \frac{1}{t}\right). \tag{55}$$

Nun wollen wir t_m so schreiben

$$t_m = -h\lambda(1-i)\sqrt{1 + \frac{1}{2i}\left(\frac{m\pi}{2h\lambda}\right)^2}$$

und ebenso wie S. 22 eine neue Veränderliche x einführen, die durch die Gleichung

$$x = \frac{m\pi}{2h\lambda}$$

definiert wird.

Da m ungerade ist, so ist in diesem Fall

$$\triangle x = \frac{\pi}{h\lambda}$$

und (55) nimmt die Form

$$T_0 = -\frac{\pi(1+i)}{4} \sum_{1,3,5,\ldots}^{m} \frac{\triangle x}{x^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{2i}}} - 1\right]$$

an. Für $\lambda = \infty$ wird $\triangle x$ unendlich klein, und die Summe geht in das Integral über. Folglich schreiben wir $T_0 = T_1 + T_2$,

wo

$$T_1 = -\frac{\pi(1+i)}{4}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{2i}}} - 1\right)$$

$$T_2 = = \frac{\pi(1+i)}{4}\left[\sum_{1,3,5,\ldots}^{m} \frac{\Delta x}{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{2i}}} - 1\right) - \int_0^\infty \frac{dx}{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{2i}}} - 1\right)\right].$$

Fassen wir die Größe T_1 ins Auge. Um die Integration auszuführen, tragen wir die Veränderliche

$$\tau^2 = 1 + \frac{x^2}{2i}$$

ein. Dann wird bei richtiger Bestimmung des Vorzeichens:

$$T_1 = \frac{\pi}{4}\int_1^\infty \frac{d\tau}{(\tau-1)^{1/2}(\tau+1)^{3/2}}$$

und durch nochmaligen Wechsel der Veränderliche, indem wir $\tau - 1 = y^2$ setzen,

$$T_1 = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{(y^2+2)^{3/2}} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{y}{2\sqrt{y^2+2}}\right]_0^\infty = +\frac{\pi}{4}. \tag{56}$$

Die andere Größe T_2 berechnen wir, wie im ersten Fall, durch Anwendung des Euler-Maclaurinschen Satzes. Auch jetzt ist

$$a + pk = \infty, \quad a = 0,$$

und für k ist $\frac{\pi}{h\lambda}$ zu setzen. Wir haben in übrigen die Funktion

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1+\frac{x^2}{2i}}}{x^2\sqrt{1+\frac{x^2}{2i}}}$$

für die zwei Werte ∞ und 0 des Arguments auszuwerten. Man überzeugt sich leicht, daß

$$f(\infty) = 0, \quad f(0) = -\frac{1}{4i}.$$

Da ferner $f(x)$ gerade ist, so sind, wie im ersten Fall, die Ableitungen $f'(x)$, $f'''(x)$, usw. einzeln Null, und wir finden endlich

$$T_2 = \frac{(1-i)\pi^2}{32h\lambda}. \tag{57}$$

Daher ist

$$(58)\qquad \left\{\begin{aligned} T &= T_\infty + T_1 + T_2 \\ &= -\frac{\pi^2 h\lambda}{8}(1+i) + \frac{\pi}{4} + (1-i)\frac{\pi^2}{32h\lambda} \\ &= -\frac{\pi^2}{16}(2h\lambda)\Big[(1+i) - \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{(2h\lambda)} - \frac{(1-i)}{(2h\lambda)^2}\Big]. \end{aligned}\right.$$

Offenbar gilt für S die aus der letzteren durch Vertauschung von λ und δ gewonnene Gleichung

$$(59)\qquad S = -\frac{\pi^2}{16}(2h\delta)\Big[(1+i) - \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2h\delta} - \frac{(1-i)}{(2h\delta)^2}\Big].$$

Demnach folgt mit Rücksicht auf unsere Hauptgleichung (36)

$$\triangle(Q+\dot{M}) = \frac{H^2\cos^2 nt}{8\pi^2\sigma}\cdot 2h(\delta+\lambda)\Big[1 - \frac{8}{\pi}\frac{1}{2h(\delta+\lambda)} - \frac{1}{(2h\delta)(2h\lambda)}\Big]$$
$$+\Big[\frac{n\delta\lambda}{\pi} - \frac{2h(\delta+\lambda)}{8\pi^2\sigma}\Big(1 + \frac{1}{(2h\delta)(2h\lambda)}\Big)\Big] H^2\cos nt\,\sin nt$$

und mit Rücksicht auf Gleichung (4)

$$(60)\qquad \left\{\begin{aligned} \triangle W &= \frac{2N^2}{\sigma}\cdot 2h(\delta+\lambda)\Big[1 - \frac{8}{\pi}\frac{1}{2h(\delta+\lambda)} - \frac{1}{(2h\delta)(2h\lambda)}\Big] \\ &= (4\delta+4\lambda)N^2\sqrt{\frac{2\pi n\mu}{\sigma}}\Big[1 - \frac{8}{\pi}\frac{1}{2h(\delta+\lambda)} - \frac{1}{(2h\delta)(2h\lambda)}\Big] \end{aligned}\right.$$

$$(61)\qquad -n\triangle L = \frac{2N^2}{\sigma}\cdot 2h(\delta+\lambda)\Big[\frac{2h\delta}{\mu}\cdot\frac{1}{1+\alpha} - \Big(1 + \frac{1}{(2h\delta)(2h\lambda)}\Big)\Big]$$
$$= (4\delta+4\lambda)N^2\sqrt{\frac{2\pi n\mu}{\sigma}}\Big[\frac{2h\delta}{\mu}\frac{1}{1+\alpha} - \Big(1 + \frac{1}{(2h\delta)(2h\lambda)}\Big)\Big]$$

$$(62)\qquad n\tau = \frac{\Big[\frac{2h\delta}{\mu}\cdot\frac{1}{1+\alpha} - \Big(1+\frac{1}{(2h\delta)(2h\lambda)}\Big)\Big]}{\Big[1 - \frac{8}{\pi}\frac{1}{2h(\delta+\lambda)} - \frac{1}{(2h\delta)(2h\lambda)}\Big]}.$$

Hier ist auf das Vorkommen der Größe $(4\delta + 4\lambda)$ hinzuweisen, die der Peripherie gleich ist. Beim Unendlichwerden der Argumente $2h\delta$, $2h\lambda$, also z. B. bei hinreichend großer Schwingungszahl verschwinden die Korrektionsglieder in den Klammern, und die Gleichungen stellen einen vollständigen „skin effect“ dar, bei dem sich das Feld auf eine dünne Schicht längs der Peripherie beschränkt, und daher die Größen $\triangle W$ und $\triangle L$ eben dieser Peripherie proportional werden.

Wenn wir die Gleichungen (60) und (61) mit den entsprechenden Gleichungen (26), (27) für den Grenzfall $\alpha = 0$ abgeleiteten vergleichen, so merken wir, daß dort der Faktor λ an Stelle von $(\delta + \lambda)$ tritt. Dieser Unter-

schied ist dadurch zu erklären, daß beim Grenzübergange $\left(\frac{\delta}{\lambda}\text{ unendlich klein}\right)$ $(\delta + \lambda)$ und λ als nicht verschieden anzusehen sind.

Die folgende Tafel zeigt die numerischen Werte der Korrektionsglieder als Funktion von $\alpha = \frac{\delta}{\lambda}$ in der Gleichung (62), unter der Annahme

$$2h\delta = 10.$$

Für einen Kupferstab von der Dicke $2\delta = 0{,}2$ cm ist dementsprechend

$$n = 6{,}6 \cdot 10^5.$$

Wir dürfen auch $\frac{2h\delta}{\mu} = 10$ setzen. Für den Grenzfall $\frac{\delta}{\lambda}$ unendlich klein, ist $n\tau = 9$.

Tafel III.

α	$\frac{1}{1+\alpha}$	$\frac{1}{(2h\delta)\,(2h\lambda)}$	Zähler	$\frac{8}{\pi}\frac{1}{2h(\delta+\lambda)}$	Nenner	$n\tau$
0,1	0,909	0,001	8,09	0,023	0,976	8,37
0,05	0,952	0,0005	8,52	0,012	0,988	8,62
0,02	0,980	0,0002	8,80	0,005	0,995	8,84
0,01	0,990	0,0001	8,90	$0{,}002_5$	$0{,}997_5$	8,92
0,001	0,999	0,0000	8,99	0,0002	1,000	8,99
0,000	1,000	0,0000	9,00	0,0000	1,000	9,00

III. Kapitel.

Korrektion wegen der endlichen Länge des Bleches.

1. Vorbemerkungen.

Der Übersichtlichkeit wegen wollen wir zunächst die unten zu brauchenden Bezeichnungen zusammenfassen und erklären; sie ordnen sich in zwei Klassen, je nachdem sie dem Fall eines Bleches endlicher Länge oder dem idealen Fall $(l = \infty)$ zugehören.

a) Ein Blech endlicher Länge.

$\mathfrak{H}_z$ = z-Komponente des magnetischen Feldes im Bleche
$= \mathfrak{H}_0 + \triangle_1\mathfrak{H}_z + \triangle_2\mathfrak{H}_z + \cdots\cdots$

$\triangle_1\mathfrak{H}_z$, $\triangle_2\mathfrak{H}_z$ = respektive erste und zweite Näherung des vom Strome induzierten Feldes.

$\mathfrak{H}_x$ = x-Komponente des magnetischen Feldes.
$= \triangle_1\mathfrak{H}_x + \triangle_2\mathfrak{H}_x + \cdots\cdots$

$\triangle_1\mathfrak{H}$ = Resultante von $\triangle_1\mathfrak{H}_z$ und $\triangle_1\mathfrak{H}_x$.

$\triangle' \mathfrak{H}_z = \triangle_1 \mathfrak{H}_z - \triangle_1 \mathfrak{H}_\infty$
= Veränderung von $\triangle_1 \mathfrak{H}_\infty$, die durch die endliche Länge des Bleches verursacht wird.
$\mathfrak{J}$ = Stromstärke im Bleche.
$= \mathfrak{J}_1 + \triangle_1 \mathfrak{J} + \triangle_2 \mathfrak{J} + \cdots$
$\triangle_1 \mathfrak{J}$, $\triangle_2 \mathfrak{J}$ = die den Feldern $\triangle_1 \mathfrak{H}$ und $\triangle_2 \mathfrak{H}$ entsprechenden induzierten Stromstärken.
$\triangle_1' \mathfrak{J} = \triangle_1 \mathfrak{J} - \triangle_1 \mathfrak{J}_\infty$.
= Unterschied zwischen dem Zusatzstrom $\triangle_1 \mathfrak{J}$ und dessen Grenzwert $\triangle_1 \mathfrak{J}_\infty$ wegen der Endlichkeit der Länge. Ebenso
$\triangle_2' \mathfrak{J} = \triangle_2 \mathfrak{J} - \triangle_2 \mathfrak{J}_\infty$

Die Größen $\triangle_1 \mathfrak{J}$, $\triangle_2 \mathfrak{J}$, $\triangle_1 \mathfrak{H}_z$ und $\triangle_1 \mathfrak{H}_x$ sind zu den Größen X_3, Y, $\frac{\partial X_3}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial X_3}{\partial \xi}$, welche in den Gleichungen (70) und (74) gegeben sind, proportional.

Ferner sind $\triangle_1' \mathfrak{J}$, $\triangle_2' \mathfrak{J}$ und $\triangle_1' \mathfrak{H}_z$ respektive den Größen $X_3' = X_3 - (X_3)_\infty$, $Y' = Y - Y_\infty$ und $\frac{\partial X_3}{\partial \xi}$ proportional.

b) Ein unendlich langes Blech.

$\mathfrak{H}_\infty$ = magnetisches Feld an irgendeinem Punkte des Bleches.
$= \mathfrak{H}_0 + \triangle_1 \mathfrak{H}_\infty + \triangle_2 \mathfrak{H}_\infty + \cdots$
$\mathfrak{J}_\infty$ = Stromstärke
$= \mathfrak{J}_1 + \triangle_1 \mathfrak{J}_\infty + \triangle_2 \mathfrak{J}_\infty + \cdots$
$\mathfrak{H}_0$ = magnetisches Feld des Solenoids $= H \cos nt$.
$\triangle_1 \mathfrak{H}_\infty$, $\triangle_2 \mathfrak{H}_\infty$ = respektive die erste und zweite Näherung des vom Strome induzierten Feldes.
$\mathfrak{J}_1$ = die durch das Feld $\mathfrak{H}_0$ induzierte Stromstärke.
$\triangle_1 \mathfrak{J}_\infty$, $\triangle_2 \mathfrak{J}_\infty$ = die den Feldern $\triangle_1 \mathfrak{H}_\infty$ und $\triangle_2 \mathfrak{H}_\infty$ entsprechenden Stromstärken.

Die Größen $\triangle_1 \mathfrak{J}_\infty$, $\triangle_2 \mathfrak{J}_\infty$ und $\triangle_1 \mathfrak{H}_\infty$ sind respektive zu den Größen $(X_3)_\infty$, Y_∞ und $\left(\frac{\partial X_3}{\partial \xi}\right)_\infty$ proportional, welche die Grenzwerte der Ausdrücke X_3, Y und $\frac{\partial X_3}{\partial \xi}$ für $l = \infty$ bilden.

2. Die Bestimmung des magnetischen Feldes und der Stromstärke.

Bis jetzt haben wir stets die Länge des Kernes als unendlich groß angenommen. In Wirklichkeit aber wird das Problem viel komplizierter. Da wir es nur mit Stäben zu tun haben, deren Länge zwar groß, aber endlich im Verhältnis zur Dicke ist, so gibt offenbar die Lösung für den idealen Fall ($l = \infty$) das Hauptglied, und es wird genügen, die von der

Länge abhängigen Glieder als Korrektionsglieder zu behandeln, die mit der kleinen Größe $\frac{\delta}{l} = \frac{\text{Dicke}}{\text{Länge}}$ des Bleches verschwinden. Ferner wollen wir nur langsame Schwingungen voraussetzen.

Um die Widerstandsänderung für diesen Fall berechnen zu können, ist die Kenntnis der Verteilung des magnetischen Feldes und der Stromstärke im Bleche erforderlich.

Für den Fall $l = \infty$ haben wir das magnetische Feld und den Strom an irgendeinem Punkte des Bleches schon bestimmt, indem wir die Maxwellschen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes mit den betreffenden Randbedingungen gelöst haben.

Auf diese Weise fanden wir

$$\mathfrak{H}_\infty = \Re\left[H \frac{\cos \varkappa x}{\cos \varkappa \delta} e^{int}\right] \tag{63}$$

$$4\pi \mathfrak{J}_\infty = \Re\left[H\varkappa \frac{\sin \varkappa x}{\cos \varkappa \delta} e^{int}\right]. \tag{64}$$

Es wäre auch möglich, wenn auch nicht so elegant, diese Größen durch sukzessive Annäherungen zu gewinnen. Da wir unten auf dieses Verfahren angewiesen sind, so wird es zweckmäßig sein, dasselbe durch Anwendung auf den idealen Fall zu erläutern und mit den Ergebnissen der früheren Methode zu kontrollieren.

Es sei das Feld wie zuvor bei Abwesenheit des Kerns überall homogen und nach der z-Achse gerichtet, und gleich $\mathfrak{H}_0 = H \cos nt$ angenommen. Bei Einführung des unendlich langen Bleches bleibt das Feld im Luftraum noch ungestört. Im Bleche selbst aber wird ein Strom induziert, der aus der zweiten Maxwellschen Gleichung $\frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \mathfrak{J} = -\mu \dot{\mathfrak{H}}$ zu berechnen ist. Es ist nämlich, wenn wir die Beziehung $\varkappa^2 = -4\pi n i \mu \sigma$ einführen,

$$\operatorname{rot} \mathfrak{J}_1 = \Re\left[\frac{\varkappa^2}{4\pi} H e^{int}\right].$$

Aus der Symmetrie des Problems geht hervor, daß $\mathfrak{J}_1$ nach der y-Achse gerichtet und nur von x abhängig ist. Folglich ist

$$\operatorname{rot} \mathfrak{J}_1 = \frac{\partial \mathfrak{J}_1}{\partial x}.$$

Lösen wir diese Gleichung für $\mathfrak{J}_1$, indem wir die Integrationskonstante durch die Symmetriebedingung $\mathfrak{J}_1 = 0$ für $x = 0$ bestimmen, so ergibt sich

$$\mathfrak{J}_1 = \Re\left[\frac{H\varkappa^2}{4\pi} x \cdot e^{int}\right].$$

Diesem Strome entspricht ein magnetisches Feld $\triangle_1 \mathfrak{H}_\infty$, das sich durch die erste Maxwellsche Gleichung $\operatorname{rot} \triangle_1 \mathfrak{H}_\infty = 4\pi \mathfrak{J}_1$ berechnen läßt. Not-

wendigerweise liegt $\triangle_1 \mathfrak{H}_\infty$ wieder in der z-Richtung und hängt nur von x ab. Es ist daher $\frac{\partial}{\partial x}(\triangle_1 \mathfrak{H}_x) = 4\pi \mathfrak{J}_1$, und durch Anwendung der Randbedingung $\mathfrak{H}_\infty = \Re[He^{int}]$ für $x = \delta$ ergibt sich

$$\triangle_1 \mathfrak{H}_\infty = -\Re\Big[\frac{H\varkappa^2}{2}(x^2 - \delta^2)\, e^{int}\Big].$$

Das Zusatzfeld erzeugt wieder einen Zusatzstrom $\triangle_1 \mathfrak{J}_\infty$, der durch Anwendung der zweiten Maxwellschen Gleichung und der Symmetriebedingung leicht zu

$$\triangle_1 \mathfrak{J}_\infty = -\Re\Big[\frac{H\varkappa^4}{4\pi}\Big(\frac{x^3}{3!} - \frac{x\delta^2}{2!}\Big) e^{int}\Big] \tag{65}$$

gefunden wird.

Das dem letzteren entsprechende magnetische Feld $\triangle_2 \mathfrak{H}_\infty$ findet man wieder aus der ersten Maxwellschen Gleichung. Es ergibt sich nämlich

$$\triangle_2 \mathfrak{H}_\infty = \Re\Big[H\varkappa^4\Big(\frac{x^4}{4!} - \frac{\delta^2 x^2}{4} + \frac{5\delta^4}{4!}\Big)\Big],$$

und unsere zweite Annäherung lautet

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_2 &= \mathfrak{H}_0 + \triangle_1 \mathfrak{H}_\infty + \triangle_2 \mathfrak{H}_\infty \\ &= \Re\Big[He^{int}\Big\{1 - \frac{\varkappa^2}{2}(x^2 - \delta^2) + \varkappa^4\Big(\frac{x^4}{4!} - \frac{\delta^2 x^2}{4} + \frac{5\delta^4}{4!}\Big)\Big\}\Big], \\ \mathfrak{J}_2 &= \mathfrak{J}_0 + \triangle_1 \mathfrak{J}_\infty \\ &= \Re\Big[\frac{H\varkappa}{4\pi} e^{int}\Big\{\varkappa x - \varkappa^3\Big(\frac{x^3}{3!} - \frac{x\delta^2}{2!}\Big)\Big\}\Big].\end{aligned}$$

Die Ausdrücke in den Klammern stellen respektive die ersten zwei Glieder der Entwicklungen von $\frac{\cos \varkappa x}{\cos \varkappa \delta}$ und $\frac{\sin \varkappa x}{\cos \varkappa \delta}$ dar (vgl. Gleichung (63), (64)). Wenn wir daher diesen Prozeß genügend oft wiederholen, so bekommen wir in beliebiger Näherung dieselben Werte für $\mathfrak{H}_\infty$ und $\mathfrak{J}_\infty$, wie schon vorher gefunden wurden.

Das Vektorpotential.

Verallgemeinerungsfähiger ist die Methode des Vektorpotentials, bei welcher man nur eine Größe $\mathfrak{A}$ und aus dieser die Unbekannten $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_z$ und $\mathfrak{J}$ durch bloße Differentationen findet.

Es ist bekanntlich das Vektorpotential an einem Aufpunkt (ξ, η, ζ) durch die Gleichung ausgedrückt

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\mathfrak{J}}{r}\, dS,$$

wo r der Radiusvektor zwischen dem Aufpunkte und irgendeinem anderen Punkte (x, y, z) und dS das Volumenelement bedeutet, und man findet dann $\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$.

Führen wir die letzte Beziehung in die zweite Maxwellsche Gleichung ein, so ergibt sich für den von dem Zusatzfelde induzierten Zusatzstrom

$$\frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \triangle \mathfrak{J} = -\mu \triangle \dot{\mathfrak{H}}$$

oder

$$\triangle \mathfrak{J} = -in\mu\sigma \mathfrak{A} = \frac{\varkappa^2}{4\pi} \mathfrak{A}.$$

Für den Fall eines Stabes endlicher Länge hat der Strom $\mathfrak{J}_1$, der durch das ursprüngliche magnetische Feld $\mathfrak{H}_0 = \Re [H e^{int}]$ induziert wird, nicht mehr den für den idealen Fall gültigen Wert $\mathfrak{J}_1 = \Re \left[\frac{H\varkappa^2}{4\pi} x e^{int} \right]$. Wir dürfen jedoch letzteren als erste Näherung in den Ausdruck für das Vektorpotential einsetzen, um eine zweite Näherung für den Strom zu ermitteln.

Demnach finden wir

$$(66) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}_1 = \int\limits_{-\delta}^{\delta} \mathfrak{J}_1 dx \int\limits_{-l}^{l} dz \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} \frac{dy}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \\ \quad = \Re \left[\frac{H\varkappa^2}{4\pi} e^{int} \int\limits_{-\delta}^{\delta} x\, dx \int\limits_{-l}^{l} dz \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} \frac{dy}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \right], \end{cases}$$

worin das Vorzeichen der Wurzel immer so zu wählen ist, daß der Radiusvektor positiv bleibt und λ als sehr groß gegen l und um so mehr gegen δ zu betrachten ist.

Das magnetische Zusatzfeld $\triangle_1 \mathfrak{H}$ ist bei einer endlichen Länge nicht mehr lediglich nach der z-Achse gerichtet, sondern hat zwei Komponenten, von denen die eine $\triangle_1 \mathfrak{H}_z$ in der z-Richtung, die zweite $\triangle_1 \mathfrak{H}_x$ in der x-Richtung liegt. Ihre Werte sind durch die folgenden Gleichungen gegeben.

$$(67) \quad \begin{cases} \triangle_1 \mathfrak{H}_x = -\frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial \zeta} \\ \triangle_1 \mathfrak{H}_z = \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial \xi}. \end{cases}$$

Der Zusatzstrom dagegen liegt noch wie vor in der y-Richtung und läßt sich durch die Beziehung

$$\triangle_1 \mathfrak{J} = \frac{\varkappa^2}{4\pi} \mathfrak{A}_1$$

berechnen.

Die erste Integration der Gleichung (66) liefert, indem wir $(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2=\gamma^2$ setzen,

$$X_1=\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{dy}{\sqrt{(y-\eta)^2+\gamma^2}}=\log\left[\frac{(\lambda-\eta)+\sqrt{(\lambda-\eta)^2+\gamma^2}}{(-\lambda-\eta)+\sqrt{(-\lambda-\eta)^2+\gamma^2}}\right];$$

da λ sehr groß ist, dürfen wir diesen Ausdruck nach Potenzen von $\frac{\gamma}{\lambda-\eta}$ bzw. $\frac{\gamma}{(-\lambda-\eta)}$ entwickeln. Demnach ist

$$X_1=\log\left[\frac{(\lambda-\eta)\pm(\lambda-\eta)\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\lambda-\eta}\right)^2+\cdots\right\}}{(-\lambda-\eta)\pm(-\lambda-\eta)\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{-\lambda-\eta}\right)^2+\cdots\right\}}\right].$$

Unsere Bedingung für das Vorzeichen von r zeigt unmittelbar, daß bei steigendem λ das Vorzeichen der Wurzel im Zähler $+$, im Nenner dagegen $-$ zu wählen ist.

Infolgedessen ist

$$X_1=\log\left[\frac{2(\lambda-\eta)\left\{1+\frac{1}{4}\left(\frac{\gamma}{\lambda-\eta}\right)^2\right\}}{\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\lambda+\eta}}\right]$$

und in der Grenze $\lambda=\infty$

$$X_1=\log 4(\lambda^2-\eta^2)-\log\gamma^2.$$

Da das erste Glied von x, y, z und t unabhängig ist, so fällt es bei den späteren Differentiationen fort und kann gestrichen werden. Folglich schreiben wir einfach

$$\mathfrak{A}_1=-\Re\left[\frac{H\varkappa^2}{4\pi}e^{int}\int_{-b}^{b}x\,dx\int_{-l}^{l}dz\cdot\log\left[(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2\right]\right]. \tag{68}$$

Die vorangehende Rechnung ist nichts anders als der bekannte Übergang von dem „Newtonschen“ zu dem „logarithmischen Potential“.

Die Integration nach z liefert, indem wir partiell integrieren[1])

$$\begin{cases} X_2=(l-\xi)\log\left[(l-\xi)^2+(x-\xi)^2\right]-4l+2(x-\xi)\,\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{l-\zeta}{x-\xi} \\ \quad+(l+\zeta)\log\left[(l+\zeta)^2+(x-\xi)^2\right] \qquad +2(x-\xi)\,\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{l+\zeta}{x-\xi}. \end{cases} \tag{69}$$

Die Integration nach x, bei der man zwischen den zwei Fällen $x-\xi>0$ $x-\xi<0$ unterscheiden muß, ergibt

1) tg^{-1} bedeutet Arcus Tangens.

$$
\left\{\begin{aligned}
X_3 &= \int_{-\delta}^{\delta} x\, X_2\, dx \\
&= (l-\xi)\left[\frac{\delta^2-\xi^2}{2}+\frac{(l-\zeta)^2}{6}\right]\log\left\{\frac{(l-\zeta)^2+(\delta-\xi)^2}{(l-\zeta)^2+(\delta+\xi)^2}\right\} \\
&+ (l+\xi)\left[\frac{\delta^2-\xi^2}{2}+\frac{(l-\zeta)^2}{6}\right]\log\left\{\frac{(l+\zeta)^2+(\delta-\xi)^2}{(l+\zeta)^2+(\delta+\xi)^2}\right\} \\
&- \frac{8}{3}\xi\,\delta\,l + 2\pi\xi\left(\frac{\xi^2}{3}-\delta^2\right) \\
&+ \left[\xi(l-\zeta)^2 - 2(\delta-\xi)^2\left(\frac{\delta}{3}+\frac{\xi}{6}\right)\right]\mathrm{tg}^{-1}\frac{\delta-\xi}{l-\zeta} \\
&+ \left[\xi(l+\xi)^2 - 2(\delta-\xi)^2\left(\frac{\delta}{3}+\frac{\xi}{6}\right)\right]\mathrm{tg}^{-1}\frac{\delta-\xi}{l+\zeta} \\
&+ \left[\xi(l-\zeta)^2 + 2(\delta+\xi)^2\left(\frac{\delta}{3}-\frac{\xi}{6}\right)\right]\mathrm{tg}^{-1}\frac{\delta+\xi}{l-\zeta} \\
&+ \left[\xi(l+\zeta)^2 + 2(\delta-\xi)^2\left(\frac{\delta}{3}-\frac{\xi}{6}\right)\right]\mathrm{tg}^{-1}\frac{\delta+\xi}{l+\zeta}.
\end{aligned}\right. \tag{70}
$$

Für $l=\infty$ heben sich sämtliche Glieder gegenseitig auf, mit Ausnahme des einzigen $2\pi\xi\left(\frac{\xi^2}{3}-\delta^2\right)$, welches, in die Gleichung

$$
\triangle_1\mathfrak{J} = -\,\Re\left[\frac{\varkappa^4}{(4\pi)^2}\,H e^{int}\,X_3\right] \tag{70a}
$$

eingesetzt, genau denselben Wert für $\triangle_1\mathfrak{J}_\infty$ liefert, wie früher in der Gleichung (64a) für den idealen Fall gefunden wurde.

Die zwei Komponenten des magnetischen Zusatzfeldes werden folglich

$$
\left\{\begin{aligned}
\triangle_1\mathfrak{H}_x &= \Re\left[\frac{H\varkappa^2}{4\pi}\left(\frac{\partial X_3}{\partial\zeta}\right)e^{int}\right] \\
\triangle_1\mathfrak{H}_z &= -\,\Re\left[\frac{H\varkappa^2}{4\pi}\left(\frac{\partial X_3}{\partial\xi}\right)e^{int}\right].
\end{aligned}\right. \tag{71}
$$

Um weitere Annäherungen $\triangle_2\mathfrak{J}$, $\triangle_2\mathfrak{H}_x$ und $\triangle_2\mathfrak{H}_z$ der Stromstärke und des Feldes zu berechnen, bilden wir das dem Strome $\triangle_1\mathfrak{J}$ entsprechende Vektorpotential an dem Aufpunkt (ξ, η, ζ)

$$
\mathfrak{A}_2 = -\int_{-\delta}^{\delta} dx \int_{-l}^{l} dz \cdot \triangle_1\mathfrak{J}\,\log\left[(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2\right]. \tag{72}
$$

Der Strom

$$
\triangle_1\mathfrak{J} = -\,\Re\left[\frac{\varkappa^4}{(4\pi)^2}\,H e^{int}\,X_3\right]
$$

läßt sich mit Hilfe der Gleichung (70) berechnen unter Vertauschung von ξ und ζ in der letzteren mit x bzw. z.

Offenbar wird diese Integration, wenn auch nicht unausführbar, so

doch sehr umständlich. Eine gute Näherung für $\triangle_2 \mathfrak{J}$ können wir indessen finden, indem wir statt X_3, nur den Grenzwert

$$(X_3)_{l=\infty} = 2\pi\xi\left(\frac{\xi^2}{3} - \delta^2\right)$$

im Integranden beibehalten. Im Falle dieses Hauptgliedes läßt sich die Integration vollständig ausführen.

Demnach ergibt sich

$$\triangle_2 \mathfrak{J} = -\frac{Hh^6}{4\pi^2} Y, \tag{73}$$

wo

$$\begin{cases}
Y = \left[\frac{(l-\zeta)^5}{60} + \frac{(l-\zeta)^3(\delta^2-\xi^2)}{6} + (l-\zeta)\left(\frac{5}{12}\delta^4 - \frac{1}{2}\delta^2\xi^2 + \frac{\xi^4}{12}\right)\right]\log\left[\frac{(\delta+\xi)^2+(l-\zeta)^2}{(\delta-\xi)^2+(l-\zeta)^2}\right] \\
\quad + \left[\frac{(l+\zeta)^5}{60} + \frac{(l+\zeta)^3(\delta^2-\xi^2)}{6} + (l+\zeta)\left(\frac{5}{12}\delta^4 - \frac{1}{2}\delta^2\xi^2 + \frac{\xi^4}{12}\right)\right]\log\left[\frac{(\delta+\xi)^2+(l+\zeta)^2}{(\delta-\xi)^2+(l+\zeta)^2}\right] \\
\quad + \frac{2\pi\xi}{3}\left(\frac{5}{2}\delta^4 - \delta^2\xi^2 + \frac{\xi^4}{10}\right) \\
\quad + \left[-\frac{(l-\zeta)^4\xi}{6} + (l-\zeta)^2\xi\left(\frac{\xi^2}{3}-\delta^2\right) + \left(\frac{8}{15}\delta^5 - \frac{5}{6}\delta^4\xi + \frac{1}{3}\delta^2\xi^2 - \frac{\xi^5}{30}\right)\right]\mathrm{tg}^{-1}\frac{\delta-\xi}{l-\zeta} \\
\quad + \left[-\frac{(l-\zeta)^4\xi}{6} + (l-\zeta)^2\xi\left(\frac{\xi^2}{3}-\delta^2\right) + \left(-\frac{8}{15}\delta^5 - \frac{5}{6}\delta^4\xi + \frac{1}{3}\delta^2\xi^2 - \frac{\xi^5}{30}\right)\right]\mathrm{tg}^{-1}\frac{\delta+\xi}{l-\zeta} \\
\quad + \left[-\frac{(l+\zeta)^4\xi}{6} + (l+\zeta)^2\xi\left(\frac{\xi^2}{3}-\delta^2\right) + \left(\frac{8}{15}\delta^5 - \frac{5}{6}\delta^4\xi + \frac{1}{3}\delta^2\xi^2 - \frac{\xi^5}{30}\right)\right]\mathrm{tg}^{-1}\frac{\delta-\xi}{l+\zeta} \\
\quad + \left[-\frac{(l+\zeta)^4\xi}{6} + (l+\zeta)^2\xi\left(\frac{\xi^2}{3}-\delta^2\right) + \left(-\frac{8}{15}\delta^5 - \frac{5}{6}\delta^4\xi + \frac{1}{3}\delta^2\xi^2 - \frac{\xi^5}{30}\right)\right]\mathrm{tg}^{-1}\frac{\delta+\xi}{l+\zeta} \\
\quad + \frac{4}{15}(l-\zeta)^3\xi\delta + \frac{58}{45}(l-\zeta)\delta^3\xi - \frac{4}{15}\delta\xi^3(l-\zeta) \\
\quad + \frac{4}{15}(l+\zeta)^3\xi\delta + \frac{58}{45}(l+\zeta)\delta^3\xi - \frac{4}{15}\delta\xi^3(l+\zeta).
\end{cases} \tag{74}$$

Beim Unendlichwerden von l geht diese komplizierte Gleichung in die folgende einfache über

$$Y_\infty = \frac{2\pi\xi}{3}\left(\frac{5}{2}\delta^4 - \delta^2\xi^2 + \frac{\xi^4}{10}\right),$$

welche, in die Gleichung (73) eingesetzt, das dritte Glied des Stromes $\mathfrak{J}_\infty$ liefert.

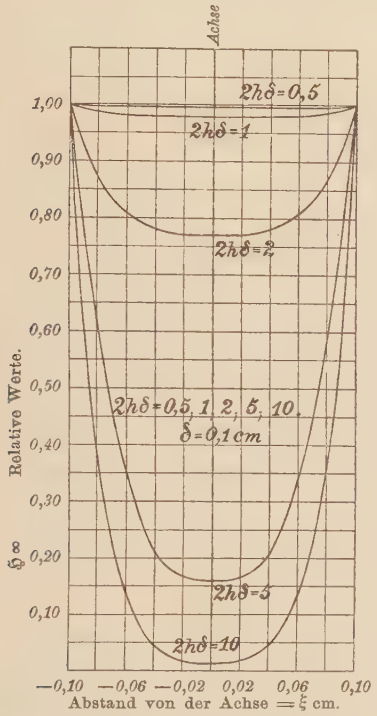
Um ein anschauliches Bild von dem Einfluß der Enden auf die Amplitude und die Verteilung der beiden Größen, Strom und magnetisches Feld im Bleche, zu gewinnen, wird es zweckmäßig sein, ihre Werte in einigen besonderen Fällen zu berechnen und mit den entsprechenden Werten für den idealen Fall zu vergleichen.

a) Idealer Fall. Schnelle Schwingungen.

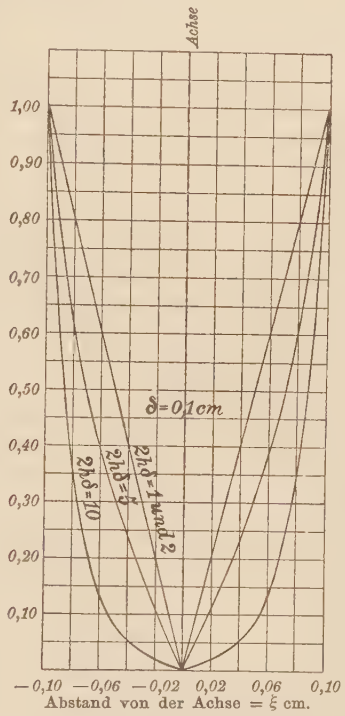
Aus den Gleichungen (63) und (64) bekommen wir leicht für die Amplitude des magnetischen Feldes und der Stromstärke

$$|\mathfrak{H}_\infty|^2 = H^2\left[\frac{\cos 2h\xi + \mathfrak{Cof}\, 2h\xi}{\cos 2h\delta + \mathfrak{Cof}\, 2h\delta}\right] \tag{75}$$

$$|\mathfrak{J}_\infty|^2 = \frac{H^2h^2}{8\pi^2}\left[\frac{\mathfrak{Cof}\, 2h\xi - \cos 2h\xi}{\mathfrak{Cof}\, 2h\delta + \cos 2h\delta}\right]. \tag{76}$$



Kurve 4.
Das magnetische Feld im Innern eines Bleches unendlicher Länge.



Kurve 5.
Die Stromstärke im Innern eines Bleches unendlicher Länge als Funktion von $2h\delta$.

Die Kurven (4) und (5) zeigen uns den Verlauf des Stromes und des Feldes als Funktionen des Argumentes $2h\delta = 2\delta\sqrt{2\pi n\mu\sigma}$ im Falle eines 2 mm dicken Kupferbleches, und zwar für die Werte $2h\delta = 0{,}5$; 1, 2, 5 und 10, (n = respektive 264, 1056, 4224, 26400 und 105600 Schwingungen pro Sekunde). In diesen Kurven wird die bedeutende Zunahme des „skineffekt“ mit steigender Schwingungszahl gekennzeichnet.

b) Idealer Fall. Langsame Schwingungen.

Schreiben wir $\mathfrak{H}_\infty = A\cos nt + B\sin nt = M\cos(nt - \alpha)$, so finden wir aus Gleichung (63) für die Amplitude des magnetischen Feldes und

dessen Phasenverschiebung gegen diejenige des an der Oberfläche bestehenden Feldes H, folgende Werte

$$(77)\quad \begin{cases} |\mathfrak{H}_\infty|^2 = H^2\left[1 + \frac{(2h)^4}{4!}(\xi^4 - \delta^4) + (2h)^8\left\{\frac{\xi^8 - \delta^8}{8!} - \frac{\delta^4(\xi^4 - \delta^4)}{4!^2}\right\}\right] \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{A}, \end{cases}$$

wo

$$(78)\quad A = H\left[1 - h^4\frac{(\xi^4 + 5\delta^4 - 6\delta^2\xi^2)}{6} + \frac{h^8}{2520}\left(\begin{matrix}\xi^8 - 28\delta^2\xi^6 - 1708\delta^6\xi^2 \\ + 350\xi^4\delta^4 + 1385\delta^8\end{matrix}\right)\right]$$

$$(79)\quad B = Hh^2(\delta^2 - \xi^2)\left[1 - h^4\frac{\left(\delta^2\xi^4 - \frac{\xi^6}{15} - 5\delta^4\xi^2 + \frac{61}{15}\delta^6\right)}{6(\delta^2 - \xi^2)}\right].$$

Ähnlicherweise ergibt sich aus Gleichung (64) für die Stromstärke

$$\mathfrak{J}_\infty = C\cos nt + D\sin nt = J\cos(nt - \beta)$$

wieder auf die Phase des ursprünglichen Feldes H bezogen.

$$(80)\quad \begin{cases} |\mathfrak{J}_\infty|^2 = \frac{H^2h^4\xi^2}{4\pi^2}\left[1 + (2h)^4\left(\frac{\xi^4}{360} - \frac{\delta^4}{24}\right) + (2h)^8\left(\frac{2\xi^8}{10!} - \frac{\xi^4\delta^4}{8640} + \frac{23\delta^8}{13440}\right) + \cdots\right] \\ \operatorname{tg}\beta = \frac{D}{C}, \end{cases}$$

wo

$$(81)\quad C = \frac{Hh}{4\pi}\cdot 2h^3\xi\left[\left(\frac{\xi^2}{3} - \delta^2\right) + h^4\left(\frac{61}{90}\delta^6 - \frac{5}{18}\xi^2\delta^4 + \frac{\delta^2\xi^4}{30} - \frac{\xi^6}{630}\right) + \cdots\right]$$

$$(82)\quad D = \frac{Hh}{4\pi}\cdot 2h\xi\left[1 - h^4\left(\frac{5\delta^4}{6} - \frac{\delta^2\xi^2}{3} + \frac{\xi^4}{30}\right) + \cdots\right].$$

Da $2h\delta < 1$, so zeigen diese Formeln unmittelbar, daß sich das magnetische Feld mit abnehmendem ξ nur langsam vermindert, z. B. für $2h\delta = 0{,}5$, $\mathfrak{H}_\infty$ an der Achse des Bleches noch den Wert $H(1 - 0{,}00130)$ hat. Im Gegenteil nimmt die Stromstärke $\mathfrak{J}_\infty$ mit abnehmendem ξ sehr nahe proportional ab. Für den Fall, den wir immer im folgenden betrachten wollen ($2h\delta = 0{,}5$; $\delta = 0{,}1$ cm und folglich für Kupfer $n = 264$ Schwingungen pro Sekunde), weicht die Kurve der Stromstärke höchstens um 173 Milliontel der betreffenden Ordinate von einer Geraden ab, und zwar ist die Stromstärke immer kleiner als der dem Falle $n = 0$ zugehörige Wert.

Was die Phase des Feldes und der Stromstärke betrifft, so sehen wir, daß diejenige des magnetischen Feldes um so mehr hinter der Phase von H nacheilt, als sich der betrachtete Punkt der Achse des Bleches nähert. Für unseren besonderen Fall aber erreicht dieser Winkel höchstens den Wert $3^0\,35'$. Die Phasenverschiebung der Stromstärke hinter der Phase

des magnetischen Feldes des Solenoids ist immer etwas größer als 90°. Ihr Wert für den von uns betrachteten Fall beträgt 93° 35′ an der Achse des Bleches und 92° 20′ an der Oberfläche. Der Phasenwinkel zwischen dem magnetischen Felde und der Stromstärke an einem gegebenen Punkte liegt daher innerhalb der Grenzen 90° und 92° 20′. Die zwischen dem Felde und der Stromstärke bestehenden Beziehungen lassen sich durchFig. 4a und 4b gut erläutern.

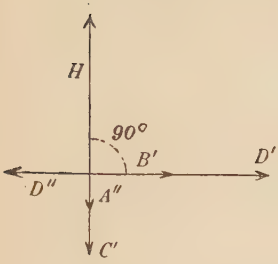


Fig. 4a.

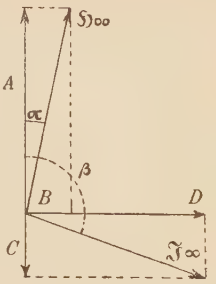


Fig. 4b.

Zählen wir negative Phasenwinkel in der dem Uhrzeiger entgegengesetzten Richtung. Sei die Phase und die Amplitude des magnetischen Feldes des Solenoids durch den Vektor H dargestellt. Demnach wird der dadurch erzeugte Strom durch den Vektor D' gegeben. Das letzterem entsprechende magnetische Zusatzfeld hat notwendig dieselbe Phase. Es sei dies demnach B'. Dieses erzeugt wieder den Strom C', welcher mit dem magnetischen Feld A'' verknüpft ist; dieses erzeugt noch den Strom D'' usw. Die Vektorsummen $(H - A'')$ und $(D' - D'')$ stellen respektive die Größen A und D von Gleichungen (78) und (82) bis zu den zweiten Gliedern dar, und ebenso sind die ersten Glieder von B und C [Gleichungen (79) und (81)] durch die Vektoren B' und C' gegeben.

c) Der Fall einer endlichen Länge.

Die Veränderung $\triangle_1' \mathfrak{J}$ des obigen Wertes der Stromstärke $\triangle_1 \mathfrak{J}$, die durch die endliche Länge des Bleches verursacht wird, ist aus Gleichung (70) und (70a) zu berechnen.

Wir finden die folgenden besonderen Formeln für $X_3' = X_3 - (X_3)_{l=\infty}$

$$X_3' = \frac{8}{3} \frac{\delta^3 \xi l}{l^2 - \zeta^2}, \tag{83}$$

wenn $\frac{\delta - \xi}{l - \zeta}$ und $\frac{\delta + \xi}{l - \zeta}$ klein; dagegen, wenn $\frac{\delta - \xi}{l - \zeta}$ und $\frac{\delta + \xi}{l - \zeta}$ nicht klein,

$$\begin{cases} X_3' = (l-\zeta)\left[\frac{\delta^2 - \xi^2}{2} + \frac{(l-\zeta)^2}{6}\right] \log \frac{1 + \frac{(\delta - \xi)^2}{(l-\zeta)^2}}{1 + \frac{(\delta + \xi)^2}{(l-\zeta)^2}} \\ \quad + \left[\xi (l-\zeta)^2 - 2(\delta - \xi)^2 \left(\frac{\delta}{3} + \frac{\xi}{6}\right)\right] \mathrm{tg}^{-1} \frac{\delta - \xi}{l - \zeta} \\ \quad + \left[\xi (l-\zeta)^2 + 2(\delta + \xi)^2 \left(\frac{\delta}{3} - \frac{\xi}{6}\right)\right] \mathrm{tg}^{-1} \frac{\delta + \xi}{l - \zeta} \\ \quad - \frac{4}{3} \xi \delta (l - \zeta) + \frac{4}{3} \frac{\delta^3 \xi}{l + \zeta} \end{cases} \tag{84}$$

und an der Endoberfläche $l - \zeta = 0$

$$X_3' = \pi\xi\left(\delta^2 - \frac{\xi^2}{3}\right) + \frac{2}{3}\frac{\delta^3\xi}{l}. \tag{85}$$

Um den Zusatzstrom $\triangle_2'\mathfrak{J}$ zu berechnen, entwickelt man auf ähnliche Weise den Ausdruck für $(Y - Y_\infty)$. So ergibt sich

$$Y' = (Y - Y_\infty) = -\frac{32}{15}\frac{l\xi\delta^5}{l^2 - \zeta^2}, \tag{86}$$

wenn $\frac{\delta - \xi}{l - \zeta}$ und $\frac{\delta + \xi}{l - \zeta}$ klein.

An der Endoberfläche

$$Y' = -\pi\xi\left(\frac{5}{6}\delta^4 - \frac{1}{3}\delta^2\xi^2 + \frac{\xi^4}{30}\right) - \frac{16}{15}\frac{\delta^5\xi}{l + \zeta} \tag{87}$$

und im allgemeinen

$$\begin{aligned} Y' = {} & \left[\frac{(l-\zeta)^5}{60} + \frac{(l-\zeta)^3(\delta^2 - \xi^2)}{6} + (l-\zeta)\left(\frac{5}{12}\delta^4 - \frac{1}{2}\delta^2\xi^2 + \frac{\xi^4}{12}\right)\right]\log\frac{1 + \frac{(\delta+\xi)^2}{(l-\zeta)^2}}{1 + \frac{(\delta-\xi)^2}{(l-\zeta)^2}} \\ & + \left[-\frac{(l-\zeta)^4\xi}{6} + (l-\zeta)^2\xi\left(\frac{\xi^2}{3} - \delta^2\right) + \left(\frac{8}{15}\delta^5 - \frac{5}{6}\delta^4\xi + \frac{1}{3}\delta^2\xi^3 - \frac{\xi^5}{30}\right)\right]\mathrm{tg}^{-1}\frac{\delta - \xi}{l - \zeta} \\ & + \left[-\frac{(l-\zeta)^4\xi}{6} + (l-\zeta)^2\xi\left(\frac{\xi^2}{3} - \delta^2\right) + \left(-\frac{8}{15}\delta^5 - \frac{5}{6}\delta^4\xi + \frac{1}{3}\delta^2\xi^3 - \frac{\xi^5}{30}\right)\right]\mathrm{tg}^{-1}\frac{\delta + \xi}{l - \zeta} \\ & + \frac{4}{15}(l-\zeta)^3\xi\delta + \frac{58}{45}(l-\zeta)\delta^3\xi - \frac{4}{15}(l-\zeta)\delta\xi^3 - \frac{16}{15}\frac{\delta^5\xi}{l + \zeta}. \end{aligned} \tag{88}$$

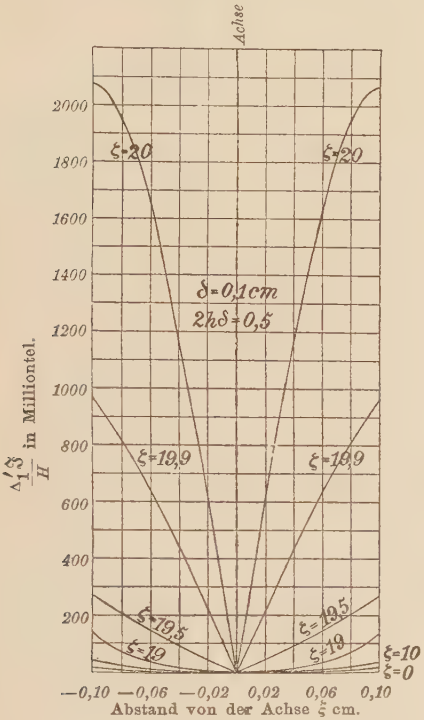
Der Zusatzstrom $\triangle_1'\mathfrak{J}$ hat eine Phase 180° hinter derjenigen der Stromkomponente C. Folglich wird der letztere in diesem Falle $C_1 = C - \triangle_1'\mathfrak{J} < C$.

Der Strom $\triangle_2'\mathfrak{J}$ hat dieselbe Phase wie die D'-Komponente von $\mathfrak{J}_\infty$ und steht daher unter einem Winkel von 90° zu derjenigen von $\triangle_1'\mathfrak{J}$. In den Kurven 6 und 7 sind respektive die Werte von $\frac{\triangle_1'\mathfrak{J}}{H}$ und $\frac{\triangle_2'\mathfrak{J}}{H}$ in Milliontel für dasselbe Blech wie vorher, dessen Länge als 40 cm angenommen wird, aufgetragen. Man bemerke, wie klein im Verhältnis zu $\frac{\triangle_1'\mathfrak{J}}{H}$ die Stromstärke $\frac{\triangle_2'\mathfrak{J}}{H}$ ist.

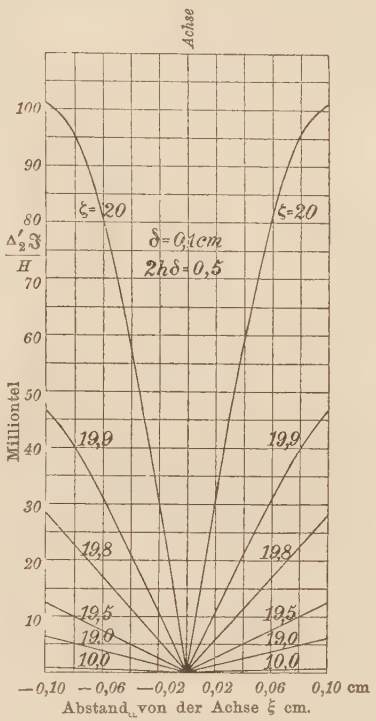
Das Zusatzfeld $\triangle_1\mathfrak{H}_z$ haben wir schon aus Gleichung (70) und (71) berechnet. Das erste Glied der Gleichung (71) ist nichts anders als das erste Glied der Gleichung (79) für die Komponente B, welches durch den Vektor B' (Fig. 4a) dargestellt wurde. Den Rest der Gleichung (71) bezeichnen wir nun als $\triangle'\mathfrak{H}_z$. Seinen Wert berechnen wir vermittelst der weiteren besonderen Gleichungen

$$\frac{\partial X_3'}{\partial \xi} = \frac{8}{3}\frac{l\delta^3}{l^2-\zeta^2}, \qquad \text{wenn } \frac{\delta-\xi}{l-\zeta} \text{ und } \frac{\delta+\xi}{l-\xi} \text{ klein}$$

(also wird $\Delta'\mathfrak{H}_z$ unabhängig von ξ in ziemlich großer Entfernung von der Endoberfläche).

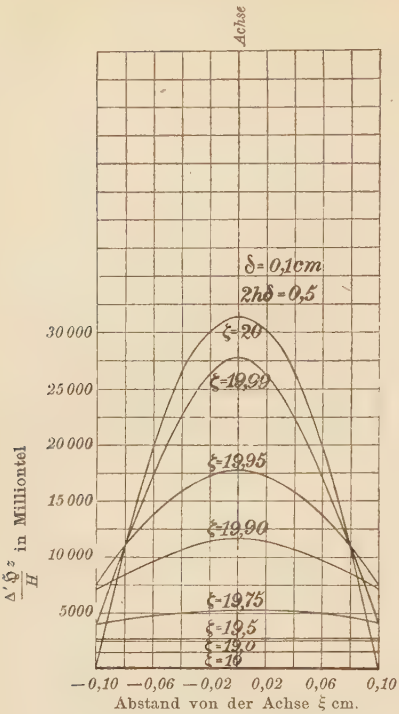


Kurve 6.
Der Zusatzstrom $\Delta_1'\mathfrak{J}$ im Innern eines 40 cm langen Bleches als Funktion des Abstandes ζ vom Mittelpunkte längs der Achse.



Kurve 7.
Die relativen Werte des Stromes $\Delta_2'\mathfrak{J}$ im Innern eines 40 cm langen Bleches.

$$(89)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_3'}{\partial \xi} = -\dfrac{4}{3}\delta(l-\xi) + \dfrac{4}{3}\dfrac{\delta^3}{l+\zeta} - \xi(l-\zeta)\log\dfrac{1+\left(\dfrac{\delta-\xi}{l-\zeta}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\delta+\xi}{l-\zeta}\right)^2} \\ \dfrac{-2(\delta-\xi)}{(l-\zeta)^2+(\delta-\xi)^2}\left[\dfrac{(l-\zeta)^3}{6}+\dfrac{(l-\zeta)(\delta^2-\xi^2)}{2}\right] - \dfrac{2(\delta+\xi)}{(l-\zeta)^2+(\delta+\xi)^2}\left[\dfrac{(l-\zeta)^3}{6}+\dfrac{(l-\zeta)(\delta^2-\xi^2)}{2}\right] \\ +\left[4(\delta-\xi)\left(\dfrac{\delta}{3}+\dfrac{\xi}{6}\right)-\dfrac{1}{3}(\delta-\xi)^2+(l-\zeta)^2\right]\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{\delta-\xi}{l-\zeta} \\ +\left[4(\delta+\xi)\left(\dfrac{\delta}{3}-\dfrac{\xi}{6}\right)-\dfrac{1}{3}(\delta+\xi)^2+(l-\zeta)^2\right]\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{\delta+\xi}{l-\zeta} \\ -\dfrac{(l-\zeta)\left[\xi(l-\zeta)^2-2(\delta-\xi)^2\left(\dfrac{\delta}{3}-\dfrac{\xi}{6}\right)\right]}{(l-\zeta)^2+(\delta-\xi)^2} + \dfrac{(l-\zeta)\left[\xi(l-\zeta)^2-2(\delta+\xi)^2\left(\dfrac{\delta}{3}-\dfrac{\xi}{6}\right)\right]}{(l-\zeta)^2+(\delta+\xi)^2}, \end{cases}$$



Kurve 8.
Das magnetische Zusatzfeld $\Delta'\mathfrak{H}_z$ im Innern eines 40 cm langen Bleches als Funktion des axialen Abstandes ζ vom Mittelpunkte.

wenn $\frac{\delta-\xi}{l-\zeta}$ und $\frac{\delta+\xi}{l-\zeta}$ nicht klein,

$$(90)\qquad \frac{\partial X_3'}{\partial \xi} = \pi(\delta^2-\xi^2)+\frac{4}{3}\frac{\delta^3}{l+\xi}$$

an der Endoberfläche.

Die Werte von $\frac{\Delta'\mathfrak{H}_z}{H}$ in Milliontel sind in der Kurve 8 aufgezeichnet. Dieses Zusatzfeld subtrahiert sich von der Komponente B.

Das Feld $\Delta\mathfrak{H}_x$ läßt sich aus Gleichung (71) mit Hilfe der folgenden Gleichungen auswerten

$$(91)\qquad \frac{\partial X_3'}{\partial \zeta} = \frac{16}{3}\xi\delta^3\frac{l\zeta}{(l^2-\zeta^2)^2},$$

wenn $\frac{\delta-\xi}{l-\zeta}$ und $\frac{\delta+\xi}{l-\zeta}$ klein,

(also in ziemlich großer Entfernung von der Endoberfläche wird $\Delta\mathfrak{H}_x$ dem Abstand ξ von der Achse proportional)

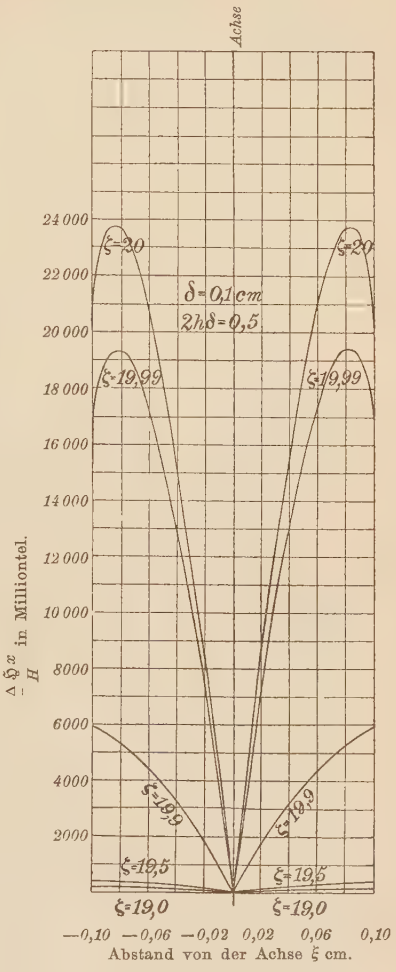
$$(92)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial X_3'}{\partial \zeta} &= \frac{4}{3}\xi\delta-\frac{4}{3}\frac{\delta\xi^3}{(l+\zeta)^2}+\frac{(l-\zeta)^2+(\delta-\xi)^2}{2}\log\frac{1+\left(\frac{\delta+\xi}{l-\zeta}\right)^2}{1+\left(\frac{\delta-\xi}{l-\zeta}\right)^2}\\ &\frac{-2(l-\zeta)}{(l-\zeta)^2+(\delta-\xi)^2}\left[\frac{(l-\zeta)^3}{6}+\frac{(l-\zeta)(\delta^2-\xi^2)}{2}\right]+\frac{2(l-\zeta)}{(l-\zeta)^2+(\delta+\xi)^2}\left[\frac{(l-\zeta)^3}{6}+\frac{(l-\zeta)(\delta^2-\xi^2)}{2}\right]\\ &\quad -2\xi(l-\zeta)\left[\operatorname{tg}^{-1}\frac{\delta-\xi}{l-\zeta}+\operatorname{tg}^{-1}\frac{\delta-\xi}{l-\zeta}\right]\\ &\quad +\frac{\delta-\xi}{(l-\zeta)^2+(\delta-\xi)^2}\left[\xi(l-\zeta)^2-2(\delta-\xi)^2\left(\frac{\delta}{3}+\frac{\xi}{6}\right)\right]\\ &\quad +\frac{\delta+\xi}{(l-\zeta)^2+(\delta+\xi)^2}\left[\xi(l-\zeta)^2+2(\delta+\xi)^2\left(\frac{\delta}{3}-\frac{\xi}{6}\right)\right],\end{aligned}\right.$$

wenn $\frac{\delta-\xi}{l-\zeta}$ und $\frac{\delta+\xi}{l-\zeta}$ nicht klein,

$$(93)\qquad \frac{\partial X_3'}{\partial \zeta} = 2\xi\delta-\frac{1}{3}\frac{\xi\delta^3}{l^2}+(\delta^2-\xi^2)\log\left(\frac{\delta+\xi}{\delta-\xi}\right)$$

an der Endoberfläche.

Die Werte von $\triangle \mathfrak{H}_x$ an verschiedenen Stellen des Bleches sind in der Kurve 9 gegeben. Es ist zu bemerken, daß $\triangle' \mathfrak{H}_z$ an der Oberfläche sein Maximum nicht gerade in der Ecke $(l-\xi)=0$, sondern in einem Abstande von ungefähr $(l-\xi)=0{,}4$ mm hat. An der Achse dagegen wird es erst zum Maximum an der Endoberfläche. Auch wird das Maximum von $\triangle \mathfrak{H}_x$ für Punkte in nächster Nähe der Endoberfläche nicht gerade an der Fläche $\xi=\delta$, sondern in kleiner Entfernung von derselben erreicht.



Kurve 9.
Das magnetische Zusatzfeld $\Delta \mathfrak{H}_x$ im Innern eines 40 cm langen Bleches als Funktion des axialen Abstandes ζ vom Mittelpunkte.

Wir können jetzt, von unserem dem idealen Fall zugehörigen Vektordiagramm ausgehend, eine Erweiterung desselben geben, welche die in den früheren Gleichungen enthaltenen Tatsachen umfassen soll. Wie wir schon gesehen haben, sind die beiden Zusatzfelder $\triangle' \mathfrak{H}_z$ und $\triangle \mathfrak{H}_x$ in derselben Phase, und zwar hat das letztere sein Maximum in der positiven x-Richtung in demselben Augenblicke, wie es das erste in der negativen z-Richtung erreicht. Da nun der Zusatzstrom $\triangle_1' \mathfrak{J}$ durch das Zusatzfeld $\triangle' \mathfrak{H}$ erzeugt wird, welches sich aus $\triangle' \mathfrak{H}_z$ und $\triangle \mathfrak{H}_x$ zusammensetzt, so liegt notwendig seine Phase in der Fig. 5 gerade 90^0 hinter derjenigen von $\triangle' \mathfrak{H}$, d. h. es subtrahiert sich von der Komponente C des Stromes $\mathfrak{J}_\infty$, wie sich aus der Gleichung (70) beweisen läßt. Die Kurven 8 und 9 zeigen uns, daß $\triangle \mathfrak{H}_x$ an der Oberfläche $\xi=\delta$ groß, $\triangle' \mathfrak{H}_z$ klein, in der Nähe der Achse hingegen $\triangle \mathfrak{H}_x$ klein, $\triangle' \mathfrak{H}_z$ groß ist. Folglich ist $\triangle_1' \mathfrak{J}$ in den der Oberfläche $\xi=\delta$ naheliegenden Punkten hauptsächlich von $\triangle \mathfrak{H}_x$ abhängig. In kleinerem Abstand von der Achse dagegen übt das Feld $\triangle' \mathfrak{H}_z$ wenn auch, wegen der Nähe der Achse, einen verhältnismäßig kleinen, so doch den Haupteinfluß aus.

Betrachten wir nun die Beschaffenheit des durch die endliche Länge des Bleches veränderten magnetischen Feldes $\mathfrak{H}$. Wie schon erwähnt,

setzt sich $\mathfrak{H}$ aus den drei Komponenten $\mathfrak{H}_\infty$, $\triangle'\mathfrak{H}_z$ und $\triangle\mathfrak{H}_x$ zusammen, und zwar mit den Amplituden und Richtungen, wie sie sich aus der Fig. 6 erkennen lassen. Ersichtlich schneidet die Richtung der Resultante $\triangle'\mathfrak{H}$ von $\triangle'\mathfrak{H}_z$ und $\triangle\mathfrak{H}_x$ die Richtung der z-Achse unter einem konstanten Winkel θ, der natürlich vom Verhältnis der beiden Amplituden abhängt.

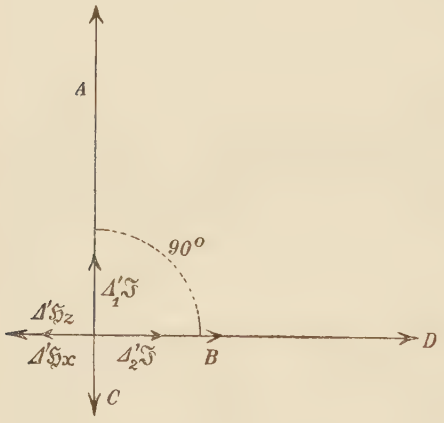


Fig. 5.

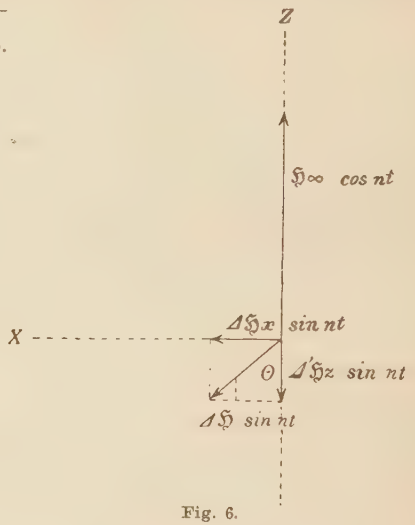


Fig. 6.

Demnach ist das magnetische Feld $\mathfrak{H}$ als die Resultante von zwei Feldern anzusehen, von denen die Phase des ersten der Phase des zweiten um 90^0 voraneilt, und deren Richtungen sich unter einem Neigungswinkel von $(180^0 - \theta)$ schneiden. Infolgedessen erkennen wir, daß $\mathfrak{H}$ ein *elliptisch rotierendes magnetisches Feld* ist, dessen maximaler und minimaler Wert wegen der Kleinheit der Größe $\frac{\triangle'\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_\infty}$ sich durch die folgenden einfachen Gleichungen berechnen lassen

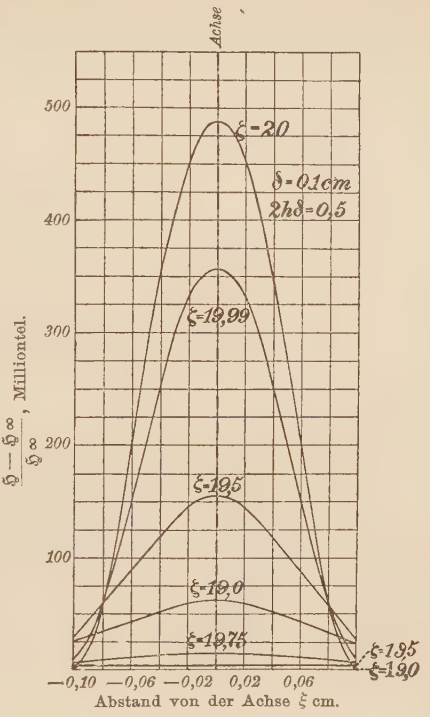
$$(94)\quad \begin{cases} \text{Maximum } \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\infty\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\triangle'\mathfrak{H}\cos\theta}{\mathfrak{H}_\infty}\right)^2\right] \\ \qquad\qquad = \mathfrak{H}_\infty\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\triangle'\mathfrak{H}_z}{\mathfrak{H}_\infty}\right)^2\right] \end{cases}$$

$$(95)\quad \begin{cases} \text{Minimum } \mathfrak{H} = \triangle\mathfrak{H}\cdot\sin\theta\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\triangle'\mathfrak{H}_z}{\mathfrak{H}_\infty}\right)^2\right] \\ \qquad\qquad = \triangle\mathfrak{H}_x\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\triangle'\mathfrak{H}_z}{\mathfrak{H}_\infty}\right)^2\right]. \end{cases}$$

Die Werte des Korrektionsfaktors in Gleichung (94) an verschiedenen Stellen des Bleches sind in die Kurve 10 eingezeichnet. Die Werte der minimalen Feldstärke [Gleichung (95)] sind praktisch mit denjenigen von $\triangle\mathfrak{H}_x$ identisch und deshalb aus der Kurve 9 zu entnehmen. Hier wie immer in den vorigen Fällen ist die starke Abnahme des Einflusses der

Enden des Bleches bei steigendem Abstand $l - \xi$ von denselben charakteristisch. Bei dieser Schwingungszahl wird in einer Entfernung von nur wenigen Millimetern von den Enden die Abweichung der Verteilung vom Strome und Felde von derjenigen im idealen Falle, wenn auch nicht gerade Null, so doch äußerst klein. Bei einer höheren Schwingungszahl wäre wohl der Effekt der Enden ausgedehnter. Es ist aber stets zu betonen, daß in der vorangehenden Behandlung die Schwingungszahl, wenigstens bei Blechen, die für die Messungen des Wirbelstromeffektes geeignet sind, immer als mäßig vorauszusetzen ist.

Übrigens sind in der obigen Beschreibung der Verteilung vom Strome und magnetischen Felde bloß die Hauptglieder der Korrektionen berücksichtigt worden. Jedoch wären die Hauptergebnisse durch eine exaktere Lösung nur in zweiter Linie zu verändern. Gehen wir jetzt zur explizierten Berechnung der Korrektion der Widerstandsänderung infolge der endlichen Länge des Bleches über.



Kurve 10.
Die Differenzen zwischen dem magnetischen Felde eines 40 cm langen Bleches und demjenigen für $l = \infty$.

3. Korrektion der Widerstandsänderung des Solenoids.

Für den idealen Fall haben wir die durch Einführung des Stabes hervorgerufenen Veränderungen von Widerstand und Selbstinduktion ermittelt, indem wir den Energiezufluß vermittelst des Poyntingschen Vektors berechnet und mit der Gleichung (2) verglichen haben. Das Oberflächenintegral des Poyntingschen Vektors, über die Fläche des Stabes erstreckt, stellt die bei Einführung des Stabes erforderliche Energiezunahme pro Zeiteinheit dar. Die letztere besteht aus den folgenden Gliedern $(Q + \dot{M}_i + \dot{M}_a) - \dot{M}_o$, wo

Q = Joulesche Wärme,

M_i = magnetische Energie im Innern des Stabes,

M_a = magnetische Energie außerhalb des Stabes,

M_o = ursprüngliche magnetische Energie im ganzen Luftraum
$= M_{oa} + M_{oi}$,

alle auf die Zeiteinheit bezogen. Was wir in den vorigen Fällen durch Anwendung des Poyntingschen Vektors berechnet haben, ist $Q + \dot{M}_i$, während wir $M_a - M_{oa}$ gleich Null setzen durften. Bei endlicher Länge aber hat das Feld im Luftraum außerhalb des Stabes nicht mehr seinen ursprünglichen Wert M_{oa}, und wir müßten das obige Glied beibehalten. Außerdem müßten wir noch ein Glied in der Gleichung (2) hinzufügen, das die Rückwirkung zwischen Kern und Solenoid berücksichtigt. Aus diesen Überlegungen geht hervor, daß die Berechnung der Selbstinduktionsänderung wesentlich erschwert wird. Die Widerstandsänderung darf man jedoch ohne weiteres in der früheren Weise berechnen. Es ist aber vielleicht übersichtlicher, die letztere hier durch die Beziehung

$$\triangle Q = \int\int\int \frac{\mathfrak{J}^2}{\sigma}\, dS$$

zu bestimmen, und im folgenden wird diese Methode verwendet werden.

An irgendeinem Punkte ist im Mittel der Zeit $\triangle Q$ mit dem Quadrate der Amplitude des Stromes an dem betreffenden Punkte, also im idealen Falle mit $(C^2 + D^2)$ (Fig. 4), proportional. Schreiben wir D in der Gleichung (82) als $D = D'(1 - \alpha)$ und sehen wir von dem zweiten Glied von C ab, so haben wir, weil schon das erste wegen des Faktors h^2 von kleinerer Ordnung wie D ist,

$$\triangle Q \text{ prop. } D'^2(1-\alpha)^2 + C'^2$$

oder annähernd

$$\triangle Q \text{ prop. } D'^2 - 2D'\alpha + C'^2.$$

Hier stellen C' und $-\alpha D'$ respektive die zweite und die dritte Näherung von $\mathfrak{J}_\infty$ dar. Wenn wir nun die Werte von C', D' und $\alpha D'$ [Gleichungen (81) und (82)] in diese letzte Gleichung einsetzen und sie durch das Volumen des Bleches und über die Zeit integrieren, so ergibt sich mit Hilfe der Gleichung (3)

$$\triangle W = \frac{4\pi^2}{3}(2\lambda \cdot 2\delta)^2 \frac{\delta}{\lambda} N^2 \mu^2 n^2 \sigma \left[1 - \tfrac{17}{420}(2h\delta)^4\right],$$

wobei das erste Glied aus D'^2, das zweite aus der Summa $(-2D'\alpha + C'^2)$ entsteht, und zwar ist das von $-D'\alpha$ abhängige negative Glied dabei überwiegend. Die obige Gleichung ist genau dieselbe wie die ersten zwei Glieder der früher abgeleiteten Gleichung (25) für $\triangle W$.

Im Falle einer endlichen Länge werden

$$C_1 = C' + \triangle_1 \mathfrak{J} = C'(1 + \beta)$$
$$D_1 = D'(l - \alpha) + \triangle_2 \mathfrak{J} = D'(1 - \alpha + \gamma)$$

und folglich, wenn wir von Gliedern höherer Ordnung absehen,

$$\triangle Q \text{ prop. } D'^2(1-2\alpha+2\gamma)+C'^2(1+2\beta).$$

Deshalb ist die durch die endliche Länge verursachte Veränderung von der Jouleschen Wärme

$$d(\triangle Q) \text{ prop. } 2(D'^2\gamma + C'^2\beta)$$

oder als Bruchteil derselben ausgedrückt

$$\frac{d(\triangle Q)}{\triangle Q} = \frac{2(D'^2\gamma + C'^2\beta)}{C'^2 + D'^2} = 2\left(\frac{\xi}{\delta}\right)^2\left[\gamma + \beta h^4\left(\frac{\xi^2}{3} - \delta^2\right)^2\right]. \tag{96}$$

Nun ist

$$\gamma = -\frac{h^4}{2\pi\xi}\,Y'$$

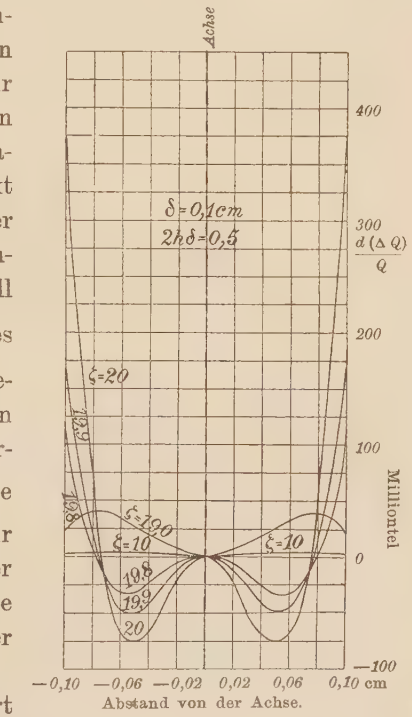
$$\beta = \frac{X_3'}{2\pi\xi\left(\frac{\xi^2}{3} - \delta^2\right)},$$

wonach wir leicht die Beziehung finden

$$\frac{d(\triangle Q)}{\triangle Q} = \left(\frac{\xi}{\delta}\right)^2 \frac{h^4}{\pi\xi}\left[-Y' - X_3'\left(\delta^2 - \frac{\xi^2}{3}\right)\right]. \tag{97}$$

Wenn wir diesen für das Volumenelement gültigen Wert über das Volumen des Bleches integrieren, so bekommen wir das Verhältnis zwischen der Korrektion *von* $\triangle W$ *und* $\triangle W$ *selbst.* Diese Integration läßt sich wahrscheinlich nicht exakt ausführen. Da wir es aber nur mit einer Korrektion zu tun haben, wird es jedenfalls genügen, in einem gegebenen Fall $\frac{d(\triangle Q)}{\triangle Q}$ an verschiedenen Stellen des Bleches zu berechnen und durch graphische Methoden oder mechanische Integration den Wert der gewünschten Korrektion zu ermitteln. Der Wert von $\frac{d(\triangle Q)}{\triangle Q}$ ist für die praktisch vorkommenden Bleche und für die vorausgesetzte Größenordnung der Schwingungszahl sehr klein. Seine Werte für dasselbe Blech wie oben sind in der Kurve 10 gezeichnet.

Daraus sieht man, wie kompliziert die Beziehungen in der Nähe der Enden sind. An der Endoberfläche ist die Korrektion an gewissen Stellen negativ. Der



Kurve 10a.
Die Werte der Änderungen $\frac{d(\triangle Q)}{\triangle Q}$ von $\triangle W$ an verschiedenen Stellen eines 40 cm langen Bleches.

positive Flächeninhalt der Kurve ist beinahe dem negativen gleich, so daß die resultierende Korrektion für einen gegebenen Abstand von der Mitte des Bleches nicht groß ist. Wenn wir von den Enden nach der Mitte gehen, so wird die Sache einfacher, und die Korrektion wird immer positiv. Die vernachlässigten Glieder in der Berechnung dieser Korrektion wären nur an den Enden von Bedeutung und ihr Gesamteffekt auf die Korrektion für das ganze Blech nicht beträchtlich.

Die Korrektion ist also auch im ganzen immer positiv, wie auch experimentell bei Zylindern gefunden wurde. In den vorigen Beispielen habe ich ein sehr kleines Verhältnis zwischen Dicke und Länge des Bleches vorausgesetzt, $(\frac{1}{200})$. Natürlich wären bei Anwendung von kürzeren, dickeren Blechen die benötigten Korrektionen ziemlich beträchtlich, wie sie auch bei den verhältnismäßig starken zylindrischen Stäben beobachtet wurden. Dann müßte aber auch die Breite der Bleche bedeutend sein, um die Gültigkeit der Grundformeln für $\triangle W$ nicht zu beeinträchtigen.

IV. Kapitel.

Das Induktions-Problem eines unendlich langen Zylinders.

Noch wichtiger wegen der praktischen Anwendungen ist die Zeitkonstante eines Zylinders. Außer der Bequemlichkeit, ein Metallstück in dieser Form herzustellen, hat der Zylinder mathematisch gegen das Blech einen Vorteil. Allerdings kommen beim Blech einfachere Funktionen als beim Zylinder vor, nämlich trigonometrische bzw. hyperbolische, wo wir beim Zylinder Besselsche Funktionen haben. Das Verfahren bei letzterem ist aber für alle Fälle in geschlossener Form zu geben, während wir beim Blech im allgemeinen genötigt waren, die Lösung zunächst nur für einen Grenzfall zu suchen und dann mit gliedweisen Korrektionen vorzugehen. Wesentlich vereinfacht wird die Berechnung des Zylinders ferner durch folgenden Umstand: während beim Blech drei Größen, nämlich Dicke 2δ, Breite 2λ und reziproke Wellenlänge h bezüglich ihrer relativen Größe in Betracht genommen werden müssen, sind beim Zylinder nur der Radius R und die Wellenlänge für das Problem maßgebend.

Wir denken uns nun einen unendlich langen leitenden Zylinder in ein unendlich langes Solenoid eingeführt, dessen Windungszahl pro Längeneinheit N beträgt.

Wie im vorigen Fall soll das Problem unter Vernachlässigung der Verschiebungsströme d. h. quasi-stationär behandelt werden. Die Permeabilität des Metalls soll ferner als konstant angenommen werden.

Das magnetische und elektrische Feld.

In dem Zwischenraum zwischen dem Zylinder und dem Solenoide hat $\mathfrak{H}$ den konstanten Wert $H \cos nt$ und ist überall nach der z-Achse gerichtet.

Innerhalb des Kerns haben wir die Maxwellschen Gleichungen zu befriedigen nämlich

$$\text{rot}\,\mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{J}$$

$$-\text{rot}\,\mathfrak{E} = \mu\dot{\mathfrak{H}}$$

und die allgemeinen Gleichungen

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{J}}{\sigma}$$

$$\text{div}\,\mathfrak{H} = 0.$$

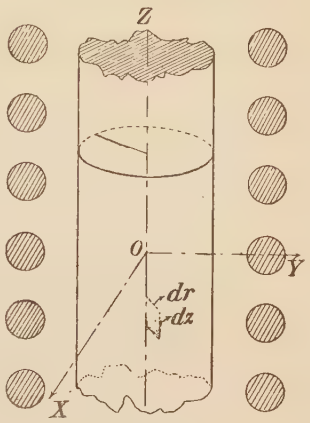


Fig. 7.

Wie pag. 9 hat folglich $\mathfrak{H}$ die Gleichung

$$\triangle\mathfrak{H} - 4\pi\sigma\mu in\mathfrak{H} = 0$$

zu befriedigen.

Gehen wir zu polaren Koordinaten r, Φ, z über, so lautet die Gleichung mit Rücksicht auf die Unabhängigkeit der Feldstärke $\mathfrak{H}$ von den Koordinaten Φ und z

$$\frac{d^2\mathfrak{H}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mathfrak{H}}{dr} + \varkappa^2\mathfrak{H} = 0 \tag{98}$$

$$\varkappa^2 = -4\pi\mu in\sigma$$

$$\varkappa = (1-i)\,h = (1-i)\sqrt{2\pi n\mu\sigma}. \tag{98a}$$

Indem wir eine neue Veränderliche $v = \varkappa r$ einführen, zeigt sich die Gleichung (98) in der Form der bekannten Besselschen Gleichung

$$\frac{d^2\mathfrak{H}}{dv^2} + \frac{1}{v}\frac{d\mathfrak{H}}{dv} + \mathfrak{H} = 0.$$

Folglich ist $\mathfrak{H}$ durch die Besselsche Funktion nullter Ordnung gegeben, die allgemein mit J_0 bezeichnet wird. (Die zweite partikuläre Lösung kommt nicht in Frage, weil sie für $r = 0$ unendlich groß werden würde.) Um aber eine etwaige Verwirrung mit dem Strome J zu vermeiden, wollen wir auf die gewöhnliche Bezeichnungsweise verzichten und

$$\mathfrak{H} = B(v) = B(\varkappa r)$$

schreiben. Diese partikuläre Lösung muß die Randbedingung

$$\mathfrak{H} = \Re \cdot He^{int} \text{ für } r = R$$

erfüllen. Folglich ergibt sich

$$\mathfrak{H} = \Re \cdot H\frac{B(\varkappa r)}{B(\varkappa R)}\,e^{int}. \tag{99}$$

Die elektrischen Kraftlinien, und damit zugleich die Strombahnen verlaufen, weil $\mathfrak{H}$ überall in der z Richtung liegt, in Kreisen um die z-Achse. Die Größe der elektrischen Feldstärke ergibt sich sofort aus der Gleichung

$$4\pi\sigma\mathfrak{E} = \text{rot}\,\mathfrak{H} = -\frac{d\mathfrak{H}}{dr}$$

d. h.

$$4\pi\sigma\mathfrak{E} = -\Re\left[\varkappa H \frac{B'(\varkappa r)}{B(\varkappa R)} e^{int}\right]. \tag{100}$$

Die Energie des Feldes.

Wir sind jetzt imstande den Strahlungsvektor zu berechnen. Fig. 8 zeigt die Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und $-\mathfrak{S}_n$ an der Oberfläche des Zylinders, zu einer bestimmten Zeit, z. B. $t = 0$. Die Richtung von $\mathfrak{H}$ liegt in der Oberfläche in der $+z$ Richtung, und $\mathfrak{E}$ ist stets tangential an den Zylinder und senkrecht auf $\mathfrak{H}$; das Produkt $-\mathfrak{S}_n$ endlich ist radial nach innen gerichtet. Da $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ an der Oberfläche konstant sind, so ist die der Längeneinheit zu einer gewissen Zeit zugeführte Energie

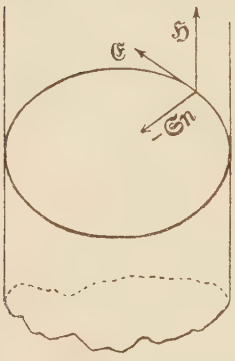


Fig. 8.

$$Q + \dot{M} = -\int \mathfrak{S}_n df = -\frac{1}{4\pi}(2\pi R)[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_{r=R}$$

$$= \frac{R}{8\pi\sigma} H\cos nt \cdot \Re\left[\varkappa H \frac{B'(\varkappa R)}{B(\varkappa R)} e^{int}\right]$$

$$= \frac{H^2 R\cos nt}{8\pi\sigma} \cdot \frac{1}{2}\left[\varkappa \frac{B'(\varkappa R)}{B(\varkappa R)} e^{int} + \bar{\varkappa} \frac{B'(\bar{\varkappa} R)}{B(\bar{\varkappa} R)} e^{-int}\right].$$

Hier sind die überstrichenen Größen die konjugierten zu denjenigen ohne Striche.

Nach Gleichung (98a) ist $\varkappa = (1-i)h$, und folglich $\bar{\varkappa} = (1+i)h$ Der Kürze halber setzen wir $B(\varkappa R) = B$, $B(\bar{\varkappa} R) = \bar{B}$ usw.

Demnach lautet die obige Gleichung

$$Q + \dot{M} = \frac{H^2 Rh}{16\pi\sigma}\left[(1-i)\frac{B'}{B} + (1+i)\frac{\bar{B}'}{\bar{B}}\right]\cos^2 nt$$

$$+ \frac{H^2 Rh}{16\pi\sigma}\left[(1+i)\frac{B'}{B} + (1-i)\frac{\bar{B}'}{\bar{B}}\right]\cos nt \sin nt.$$

Mit Rücksicht auf Gleichung (7) und (8) findet man folglich

$$\triangle(Q + \dot{M}) = \frac{H^2 Rh}{16\pi\sigma}\left[(1-i)\frac{B'}{B} + (1+i)\frac{\bar{B}'}{\bar{B}}\right]\cos^2 nt$$

$$+ \left\{\frac{nH^2R^2}{4} + \frac{H^2 Rh}{16\pi\sigma}\left[(1+i)\frac{B'}{B} + (1-i)\frac{\bar{B}'}{\bar{B}}\right]\right\}\cos nt \sin nt.$$

Wenn wir dies mit Gleichung (4) vergleichen, so ergibt sich unmittelbar

$$\begin{aligned} \triangle W &= \frac{\pi N^2 R h}{\sigma}\left[(1-i)\frac{B'}{B}+(1+i)\frac{\overline{B}'}{\overline{B}}\right] \\ -n\triangle L &= \frac{\pi N^2 R h}{\sigma}\left[\frac{4\pi n R\sigma}{h}+(1+i)\frac{B'}{B}+(1-i)\frac{\overline{B}'}{\overline{B}}\right] \end{aligned} \tag{101}$$

und nach unserer Definition

$$n\tau = \frac{\frac{4\pi n R\sigma}{h}+(1+i)\frac{B'}{B}+(1-i)\frac{\overline{B}'}{\overline{B}}}{(1-i)\frac{B'}{B}+(1+i)\frac{\overline{B}'}{\overline{B}}}.$$

Wenn wir das Argument $\varrho = Rh$ einführen, so wird der Ausdruck übersichtlicher. Es wird nämlich (vgl. Gl. (98a)) das erste Glied des Zählers von $n\tau$ gleich $\frac{2\varrho}{\mu}$, wofür auch $2\varrho + 2\varrho\,\frac{(1-\mu)}{\mu}$ geschrieben werden kann. Dadurch wird für unmagnetische Metalle der Ausdruck in zwei Teile gespalten, von denen der erste als Hauptglied, der letzte als Korrektionsglied zu betrachten ist.

Wir haben nämlich

$$n\tau = f(\varrho) + \frac{(1-\mu)}{\mu}\varphi(\varrho), \tag{102}$$

wo

$$f(\varrho) = \frac{2\varrho+(1+i)\frac{B'}{B}+(1-i)\frac{\overline{B}'}{\overline{B}}}{(1-i)\frac{B'}{B}+(1+i)\frac{\overline{B}'}{\overline{B}}} \tag{103}$$

$$\varphi(\varrho) = \frac{2\varrho}{(1-i)\frac{B'}{B}+(1+i)\frac{\overline{B}'}{\overline{B}}}. \tag{104}$$

Wir müssen jetzt die Besselschen Funktionen auswerten. Wie beim Blech haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Schwingungszahl klein oder groß ist.

Entwicklung nach aufsteigenden Potenzen von ϱ.

Das Argument der Funktionen B und B' ist $\varkappa R = (1-i)\varrho$, dasjenige von $\overline{B}$ und $\overline{B}'$ ist $(1+i)\varrho$. Nach Gleichung (98a) wird bei genügend tiefer Schwingungszahl ϱ eine kleine Größe. Dementsprechend dürfen wir uns der für die Besselsche Funktion nullter Ordnung gültigen Entwicklung nach aufsteigenden Potenzen des halben Argumentes bedienen.

Es ist nämlich

$$B(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots$$

und durch Differentiation

$$B'(x) = -\frac{x}{2}\left[1 - \frac{1}{1!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!4!}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots\right].$$

Für die betreffenden Funktionen finden wir demnach

$$(105)\quad \begin{cases} B = 1 + i\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)\alpha - \left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2\beta \\ \overline{B} = 1 - i\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)\alpha - \left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2\beta \\ B' = -(1-i)\,\frac{\varrho}{2}\left[1 + i\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)\gamma - \left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2\delta\right] \\ \overline{B}' = -(1+i)\,\frac{\varrho}{2}\left[1 - i\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)\gamma - \left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2\delta\right], \end{cases}$$

wo

$$(106)\quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{(1!)^2} - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{(5!)^2}\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^4 - \cdots \\ \beta = \frac{1}{(2!)^2} - \frac{1}{(4!)^2}\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{(6!)^2}\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^4 - \cdots \\ \gamma = \frac{1}{2!1!} - \frac{1}{4!3!}\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{6!5!}\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^4 - \cdots \\ \delta = \frac{1}{3!2!} - \frac{1}{5!4!}\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{7!6!}\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^4 - \cdots \end{cases}$$

Die Berechnung von $f(\varrho)$ läßt sich am bequemsten ausführen, indem wir zunächst die Nenner und Zähler mit $B\overline{B}$ multiplizieren.

Dann wird

$$f(\varrho) = \frac{2\varrho \cdot B\overline{B} + (1+i)\overline{B}B' + (1-i)B\overline{B}'}{(1-i)\overline{B}B' + (1+i)B\overline{B}'}$$

oder

$$(107)\quad f(\varrho) = \frac{\varrho^2}{2}\,\frac{\alpha(\alpha-\gamma) - (\beta-\delta) + \beta(\beta-\delta)\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2}{(\alpha-\gamma) + (\beta\gamma - \alpha\delta)\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2}.$$

Diese Formel ist genau. Es ist nur nötig, bei deren Benutzung eine hinreichende Anzahl von Gliedern in der Berechnung von α, β, γ und δ beizubehalten, welche Anzahl natürlich vom Werte von ϱ abhängt.

Auf ganz ähnliche Weise finden wir

$$(108)\quad \varphi(\varrho) = \frac{2}{\varrho^2}\,\frac{1 + (\alpha^2 - 2\beta)\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2 + \beta^2\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^4}{(\alpha-\gamma) + (\beta\gamma - \alpha\delta)\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2}.$$

Fall I. Langsame Schwingungen.

Eine erste Annäherung für $\varphi(\varrho)$ läßt sich leicht berechnen, indem wir Glieder in $\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2$ vernachlässigen. Dann ergibt sich

$$\varphi(\varrho) = \frac{4}{\varrho^2}. \tag{109}$$

Behalten wir jedoch Glieder in $\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2$ bei, so bekommen wir als zweite Annäherung

$$\varphi(\varrho) = \frac{4}{\varrho^2}\left[1 + \frac{11}{24}\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2\right]. \tag{110}$$

Ähnlicherweise ergibt sich für

$$f(\varrho) = \frac{\varrho^2}{3} = \frac{2}{3}(\pi R^2) n \mu \sigma \tag{111}$$

als erste Annäherung, und

$$f(\varrho) = \frac{\varrho^2}{3}\left[1 - \frac{1}{60}\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2\right] \tag{112}$$

als zweite Annäherung.

Wir können auch nach demselben Verfahren einfache Formeln für $\triangle W$ und $\triangle L$ ableiten.

Es ergibt sich nämlich

$$\left\{\begin{aligned} \triangle W &= \frac{\pi N^2 \varrho^4}{\sigma} \frac{\left[(\alpha - \gamma) + (\beta\gamma - \alpha\delta)\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2\right]}{\left[1 + (\alpha^2 - 2\beta)\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2 + \beta^2\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^4\right]} \\ &= 2\pi N^2 (\pi R^2)^2 n^2 \mu^2 \sigma \left[1 - \frac{11}{24}\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2\right] \end{aligned}\right. \tag{113}$$

$$\left\{\begin{aligned} -n\triangle L &= \frac{\pi N^2 \varrho^6}{2\sigma} \frac{\left[\alpha(\alpha - \gamma) - (\beta - \delta) + \beta(\beta - \delta)\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2\right]}{\left[1 + (\alpha^2 - 2\beta)\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2 + \beta^2\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^4\right]} \\ &= \frac{4\pi}{3} N^2 (\pi R^2)^3 n^3 \mu^3 \sigma^2 \left[1 - \frac{19}{40}\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2\right]. \end{aligned}\right. \tag{114}$$

Man darf daher aus den Gleichungen (113), (114) folgende Schlüsse bei einem Stab eines unmagnetischen Metalles und kleiner Schwingungszahl ziehen:

1) *die Widerstandszunahme nimmt proportional der Leitfähigkeit, dem Quadrate der Schwingungszahl und dem Quadrate des Querschnitts zu*;

2) *die Selbstinduktionsverminderung wächst proportional dem Quadrate der Leitfähigkeit, dem Quadrate der Schwingungszahl und der dritten Potenz des Querschnittes*;

3) *die Zeitkonstante verändert sich wie das Produkt aus der Leitfähigkeit und dem Querschnitte.*

Diese Ergebnisse stimmen vollständig mit denjenigen, die wir beim Grenzfall des unendlich breiten Bleches pag. 12 gefunden haben.

Sie sind aber nicht vollständig in Einklang mit den Angaben einer in der Einleitung zitierten Dissertation von Schlösser. Der Unterschied besteht darin, daß nach ihm die Selbstinduktionsabnahme proportional dem Quadrate statt der dritten Potenz des Querschnitts zunehmen soll. Zugestandenerweise passen seine Beobachtungen mit diesem Gesetze nur annähernd zusammen; bei den größeren Querschnitten, für die die Genauigkeit der Messungen eine bessere ist, wäre die Übereinstimmung besser, wenn eine höhere Potenz des Querschnitts angenommen wäre. Diese von Herrn Schlösser benutzte Formel wurde aus dem von Oberbeck[1]) gegebenen Schwächungskoeffizienten F der Induktion abgeleitet (s. oben S. 2). Nach Schlösser wäre der durch die Anwesenheit des Stabes veränderte Wert der Selbstinduktion p' aus dem ursprünglichen p nach der Gleichung $p' = pF$ zu finden, was nicht weiter begründet wird und in Wirklichkeit nicht richtig ist.

Fall 2. Schnelle Schwingungen.

Hier ist ϱ als groß vorauszusetzen. Um B und B' auswerten zu können, bedienen wir uns der semikonvergenten Reihen für die Besselschen Funktionen mit großem Argument[2]), indem wir die Glieder in $\left(\frac{1}{x}\right)^2$ vernachlässigen,

$$B_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8x}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$B_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{3}{8\pi}\sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{8x}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

wo $B_1(x)$ die Besselsche Funktion erster Ordnung bedeutet. Durch Anwendung der bekannten Formel

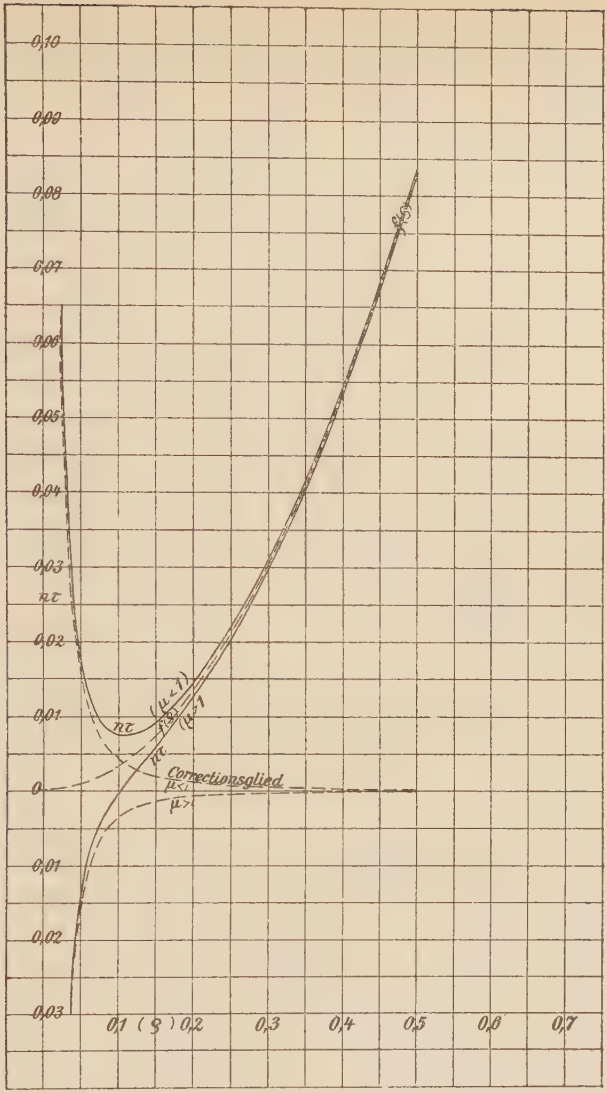
$$B_0'(x) = -B_1(x)$$

wird folglich

$$\frac{B_0'(x)}{B_0(x)} = i\left(1 + \frac{i}{2x}\right).$$

1) Wied. Ann. 21, 1884, S. 695.

2) Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, S. 153 und 156.



Kurve 11.
Einfluß der Permeabilität auf die Zeitkonstante beim Zylinder
$1 - \mu = \pm 10^{-5}$.

Wir dürfen daher

$$\frac{B'}{B} = \quad i\left(1 - \frac{(1-i)}{4\varrho}\right)$$

$$\frac{\bar{B}'}{B} = -i\left(1 - \frac{(1+i)}{4\varrho}\right)$$

setzen.

Tafel IV.

Berechnung der Zeitkonstante für einen zylinderischen Stab.

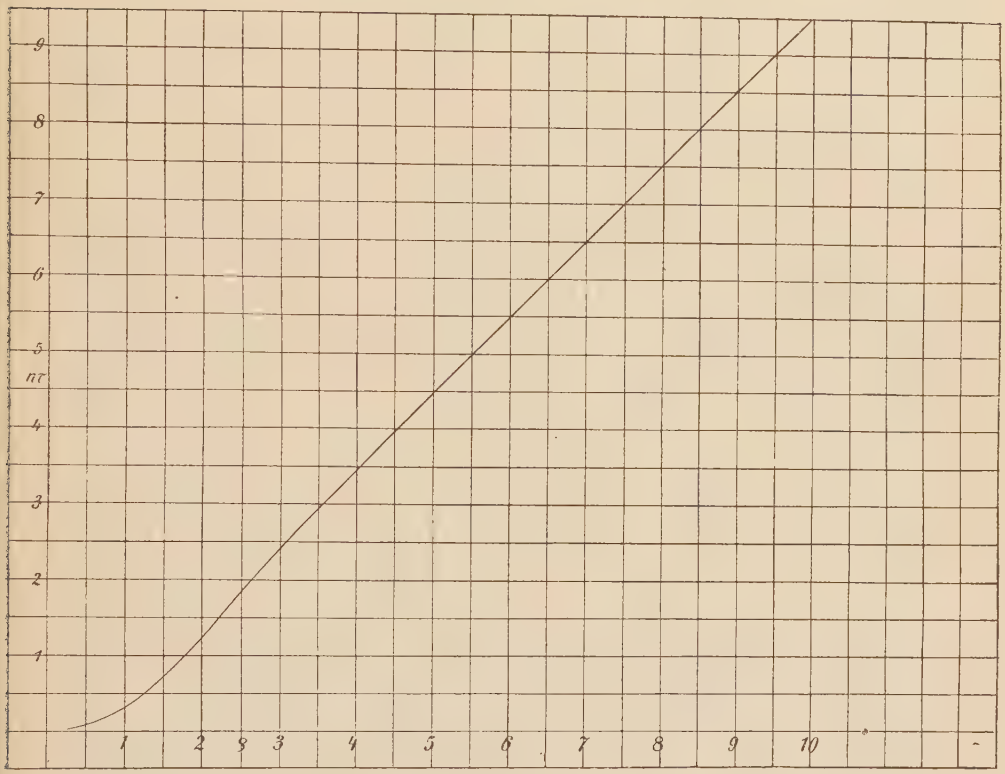
ϱ	$\frac{\varrho^2}{3}$	$\frac{\varrho^2}{3}\left(1-\frac{1}{60}\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)^2\right)$	Korrektionsglied		$n\tau$, Formeln (110) u. (112)		$\varrho-1$	Formeln (117)	Genaue Formel	
			$1-\mu=10^{-4}$	$1-\mu=10^{-5}$	$1-\mu=10^{-4}$	$1-\mu=10^{-5}$		$1-\mu=10^{-4}$	$1-\mu=10^{-4}$	$1-\mu=10^{-5}$
0,2	0,0133	0,0133	0,0100	0,0010	0,0233	0,0143			0,0233	0,0143
0,4	0,0533	0,0533	0,0025	0,0002	0,0558	0,0535			0,0558	0,0525
0,6	0,1200	0,1200	0,0011	0,0001	0,1211	0,1201			0,1211	0,1201
0,8	0,2133	0,2130	0,0006	0,0001	0,2136	0,2131			0,2136	0,2131
1,0	0,3333	0,3319	0,0004	0,0000	0,3323	0,3319	0,0000	0,0001	0,3323	0,3319
1,25	0,5207	0,5156	0,0003		0,5158	0,5156	0,2500	0,4167		
1,5	0,7500	0,7334	0,0002		0,7336	0,7334	0,5000	0,7500	0,7353	0,7351
1,75	1,0213	0,9813	0,0001		0,9814	0,9813	0,7500	1,050	0,980	0,980
2,0	1,3343	1,244	0,0001		1,244	1,244	1,000	1,333	1,255	1,255
2,5	2,0833	1,744			1,744	1,744	1,500	1,875	1,835	1,835
3,0	3,000	1,989			1,989	1,989	2,000	2,400	2,394	2,394
4,0							3,000	3,492	3,443	3,443
5,0							4,000	4,444	4,465	4,465
6,0							5,000	5,454	5,466	5,466
7,0							6,000	6,461		
8,0							7,000	7,467	7,483	7,483
9,0							8,000	8,471	8,520	8,520
10,0							9,000	9,474		

Aus den Gleichungen (101) finden wir jetzt leicht

$$\triangle W = (2\pi R)\, N^2 \sqrt{\frac{2\pi n\mu}{\sigma}} \left(1 - \frac{1}{2\varrho}\right) \tag{115}$$

$$-n\triangle L = (2\pi R)\, N^2 \sqrt{\frac{2\pi n\mu}{\sigma}} \left(\frac{\varrho}{\mu} - 1\right) \tag{116}$$

$$n\tau = \frac{\frac{\varrho}{\mu} - 1}{1 - \frac{1}{2\varrho}}. \tag{117}$$



Kurve 12.
Die Zeitkonstante eines Zylinders als Funktion des Arguments $\varrho = Rh$.

Als erste Annäherung für große ϱ können wir demnach die mit der Rayleighschen Widerstandsberechnung verwandte Formel benutzen

$$n\tau = \frac{\varrho}{\mu} - 1 = \frac{R}{\mu}\sqrt{2\pi n\mu\sigma} - 1. \tag{118}$$

Tafel IV gibt eine Übersicht der Genauigkeit der Annäherungen (110), (111), (112) und (117), wobei zu beachten ist, daß bei großem ϱ der Einfluß einer mäßigen Permeabilität μ sehr gering ist, so daß $f(\varrho)$ und

$n\tau$ zusammenfallen. In den Kurven 11 und 12 ist der Verlauf der Größen $f(\varrho)$, $\varphi(\varrho)$ und $n\tau$ unter der Annahme $1-\mu = 10^{-5}$ gezeichnet.

In jedem Falle werden die genauen Werte von $f(\varrho)$ durch die Formel (107) berechnet. Aus dieser Tafel ist ersichtlich, daß für $\varrho < 1$ die Annäherung (112) eine genügende ist, und für $\varrho > 1$ (etwa von $\varrho = 3$ ab) die für großes ϱ gültige Gleichung gut übereinstimmt. In Tafel IV sind auch die Werte von $\varphi(\varrho)$ und von dem mit $\frac{1-\mu}{\mu}$ behafteten Gliede für verschiedene Werte von ϱ unter den zwei Annahmen $1-\mu = 10^{-4}$ und $1-\mu = 10^{-5}$ berechnet worden.

Die Ergebnisse der Tafel und der Kurven 11 und 12 sind wesentlich dieselben wie beim Blech (vgl. S. 14—16).

V. Kapitel.

Experimenteller Teil.

Die Methoden für die Bestimmung von ΔW, ΔL und τ.

Um die in der Einleitung definierte Zeitkonstante τ zu messen, können wir mindestens vier Methoden benutzen, von denen drei gestatten, ΔW und ΔL getrennt zu bestimmen, und die vierte τ direkt liefert. Diese letzte ist die in der Einleitung erwähnte Wiensche Brückenmethode.

1. Die Wiensche Methode.

Die Brücke (Fig. 9) besteht aus zwei Spulen I und II, deren Widerstand und Selbstinduktion am geeignetsten untereinander nahe gleich gewählt werden, und außerdem aus zwei selbstinduktionsfreien Widerständen W_3 und W_4. Im Brückenzweig befindet sich ein Vibrationsgalvanometer oder ein optisches Telephon G.

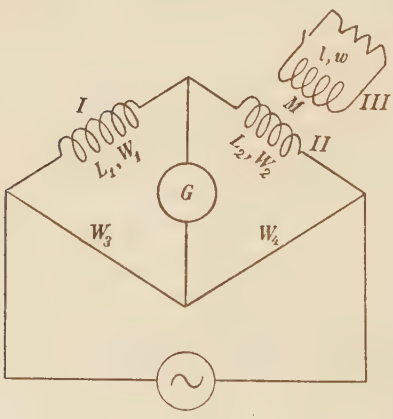


Fig. 9.

Der Strom wird zunächst durch abwechselnde Veränderung von zweien der Widerstände, z. B. W_2 und W_4 auf Null gebracht. Bei Einführung des betreffenden Metallstabes in die Spule I wird nun das Gleichgewicht der Brücke gestört. Um diesen Effekt zu kompensieren, schließt man den Stromkreis der Spule III, deren gegenseitige Induktion M in bezug auf die Spule II sich stetig verändern läßt. Jetzt verkleinert man, ohne W_3 oder W_4 zu verändern, durch abwechselnde Variation der

gegenseitigen Induktion M und des Widerstandes w des Kreises III, den von der Anwesenheit des Stabes hervorgerufenen Ausschlag des Galvanometers, bis der Galvanometerzweig wieder stromlos wird.

Dann bestehen die folgenden Gleichgewichtsbedingungen[1]), die unmittelbar aus der Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze auf die Brücke folgen:

$$(119)\qquad \begin{cases} \tau = -\dfrac{\Delta L}{\Delta W} = \dfrac{l}{w} \\ n^2 M^2 = \dfrac{W_4}{W_3}\,(w \triangle W + n^2 l \cdot \triangle L). \end{cases}$$

In diesen Formeln beziehen sich wie früher die Größen $\triangle L$ und $\triangle W$ auf die Spule I, in welche der Stab eingeführt wird. Ersichtlich ist die Wiensche Methode eine Nullmethode; sie hat außerdem den Vorteil, daß nur *eine* veränderliche Größe w bestimmt werden muß, während die andere zur Kompensation dienende Größe M nicht bekannt zu sein braucht, da die erste der Gleichungen (119) allein weiter verwandt wird.

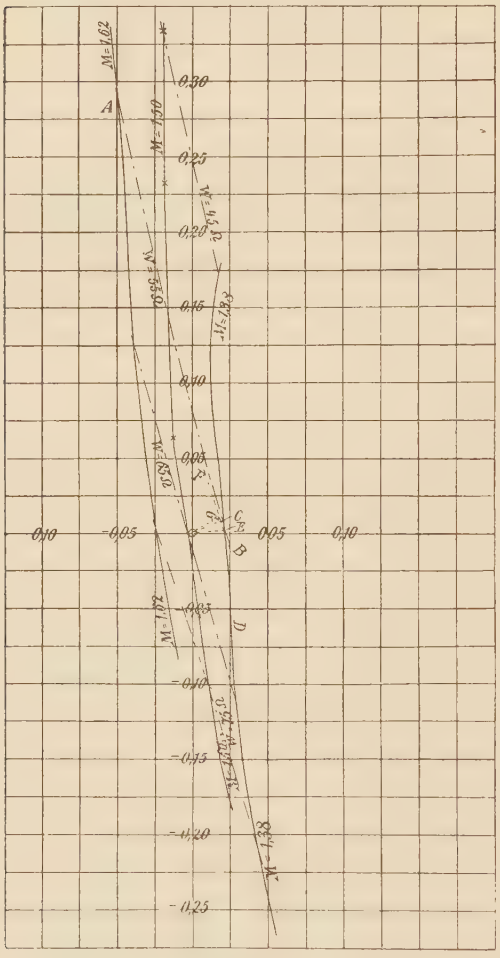
Für den Fall, wo $\triangle L$ positiv ist, was nach dem theoretischen Teil für hinreichend kleines n schon bei mäßigem μ zu erwarten ist, darf man diese Methode nicht verwenden. Dies folgt sofort aus der Betrachtung des Vorzeichens der Gleichung (119). Der physikalische Grund dafür wird ersichtlich, wenn man die Phasenverhältnisse der verschiedenen in den Brückenzweigen bestehenden Potentialdifferenzen näher betrachtet. Es ist nämlich notwendig, um eine positive Veränderung der Selbstinduktion kompensieren zu können, daß die Phase der induzierten E. M. K. derjenigen des Stromes voraneilt, was nicht durch Widerstand und Selbstinduktion allein bewirkt wird. Vielmehr müßte man dafür sehr beträchtliche Kapazitäten hinzufügen, wobei die Einfachheit der Methode verloren gehen würde.

Bei dieser sowie bei anderen Wechselstrombrückenmethoden erreicht man das ursprüngliche Gleichgewicht der Brücke, indem man zwei der Veränderlichen der Brücke abwechselnd variiert. In diesem Fall nämlich erfolgt die ursprüngliche Nulleinstellung der Brücke durch abwechselnde Veränderung der zwei Widerstände W_2 und W_4. Durch Veränderung von W_4 z. B. erreicht man zunächst ein Minimum des Galvanometerstromes, sodann durch Variation von W_2 einen zweiten kleineren minimalen Ausschlag des Galvanometers, drittens durch abermalige Veränderung von W_4 ein noch kleineres Minimum usf. Auf diese Weise wird im allgemeinen die Nullstelle rasch angenähert und in kurzer Zeit erreicht.

---

1) Wien hat aus einfachen Betrachtungen die erste dieser Formeln abgeleitet: vgl. auch Rayleigh, Rep. of the Brit. Assoc. 1880, S. 1—2. Die zweite Formel habe ich in der Literatur nicht vorgefunden.

Sucht man jetzt, nach Einführung des Stabes, durch abwechselnde Variation der gegenseitigen Induktion M und des Widerstandes w wieder Gleichgewicht herzustellen, so gelingt es in einigen Fällen nur mit Schwierigkeit. Es ist allerdings sehr leicht, z. B. ein Minimum des Galvanometerstromes durch Veränderung von M zu finden. Sucht man andererseits aber dieses so gewonnene Minimum durch Variation von w zu verkleinern, so macht man oft die Erfahrung, daß der Strom sich sehr langsam mit w verändert, und bei fast jeder Variation des w zunimmt. Man muß schon besondere Aufmerksamkeit verwenden, um zu sehen, daß bei einer sehr kleinen Veränderung des Widerstandes in einer Richtung der Galvanometerstrom wirklich abnimmt und ein kleineres Miminum desselben erreichbar ist. Obwohl man auf diese Weise schließlich zu einer Nullstelle gelangen kann, wird ihre Feststellung wegen der Kleinheit der Stufen des Prozesses sehr zeitraubend.



Kurve 13.
Die Erklärung der Unempfindlichkeit der Brücke.
— = M konst. —.—.— = w konst. .... = der Fall in der Besprechung p. 63.

Die Sache läßt sich graphisch erklären, wenn wir den Galvanometerstrom als Vektorgröße nach Phase und Stärke wie in einer komplexen Ebene zeichnen. Er bildet nämlich immer den Schnittpunkt von zwei Kurvenscharen, von denen die Punkte der einen durch ihre Verbindungslinie mit dem festen Nullpunkte den Strom bei konstantem M, die andere den Strom bei konstantem w darstellt. Die wirklichen Kurven haben wir in Kurve 13 für einen von uns experimentell untersuchten Fall, denjenigen eines 0,7 cm dicken, 25 cm langen Kupferstabes, gezeichnet.

Die von uns bestimmten Konstanten der Brücke waren:

$$W_1 = 7{,}05\ \Omega, \quad nL_1 = 14{,}46\ \Omega, \qquad \triangle W = 0{,}0440\ \Omega,$$
$$W_2 = 7{,}76\ \Omega, \quad nL_2 = 15{,}92\ \Omega, \quad -n\triangle L = 0{,}0075\ \Omega,$$
$$l = 9{,}25 \text{ millihenry}, \quad n = 1200.$$

Aus der Kurve erkennt man, daß die zwei Kurvenscharen tatsächlich unter einem nur sehr kleinen Winkel gegeneinander geneigt sind, was eine Erklärung der Schwierigkeit unmittelbar gibt. Fassen wir z. B. den Punkt A ins Auge, der den Wert des Galvanometerstromes g für $w = 55\ \Omega$, $M = 1{,}62$ millihenry darstellt. Halten wir jetzt w konstant und verändern M stetig, so werden die sukzessiven Werte von g durch die Entfernung der Punkte der Kurve AB von dem Nullpunkte O gegeben; ein Minimalwert des Stromes wird erreicht, der durch den senkrecht auf der Kurve AB stehenden Vektor OC gegeben ist. Wenn wir jetzt M auf dem zu C gehörigen Werte festhalten und w variieren, so wird der Endpunkt des Vektors g durch die Punkte einer von C auslaufenden Kurve CD dargestellt, und man sieht sehr leicht, daß der Vektor OE, der senkrecht auf der Kurve CD steht, sehr nahe gleich dem Vektor OC ist. Halten wir abermals den Widerstand w fest und verändern die gegenseitige Induktion, so finden wir ein drittes Minimum OG, das die kürzeste Distanz zwischen dem Punkte O und der Kurve EF bildet. Dieser letztere Vektor hat gleichfalls ungefähr denselben Wert und dieselbe Richtung wie die zwei früher gefundenen minimalen Werte OC und OE des Stromes.

Es gelingt also nur sehr langsam, den Brückenzweig stromlos zu machen, und was noch schlimmer ist, und die Figur ebenfalls zeigt, ist die Unsicherheit in der Bestimmung des w.

Aus Fig. 10 ist ersichtlich, wie anders die Sache liegt, wenn die Kurvenscharen $w =$ konst. und $M =$ konst., im Sinne der vorigen Figur entworfen, einen Neigungswinkel von etwa 90^0 miteinander bilden.

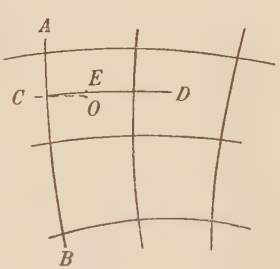


Fig. 10.

Der in einem bestimmten Fall bestehende Neigungswinkel hängt, wie sich gezeigt hat, nicht nur vom Verhältnis der absoluten Größe von $\triangle L$ und $\triangle W$, sondern von ihren Werten selbst ab. Je kleiner diese Größen im Verhältnis zu den ursprünglichen L und W sind, desto kleiner ist der Neigungswinkel. Bei den von Wien untersuchten Metallscheiben, welche einen viel größeren Radius als der obige Stab hatten und in kurze Spulen hineingesteckt werden konnten, und für welche daher (vgl. Gleichung (113) und (114)) $\triangle W$ und $\triangle L$ wahr-

scheinlich im Verhältnis zu L und W viel größer waren, ist die Sache ohne Zweifel viel besser gewesen. Andererseits wäre bei großen Radien der Versuchsstäbe die Anwendbarkeit der für einen unendlich langen Zylinder abgeleiteten Formeln beeinträchtigt. Es empfiehlt sich daher, wenigstens zum Zweck einer Bestätigung der im theoretischen Teil gefundenen Formeln, die folgende Methode zu verwenden.

2. Einfache Brückenmethode.

Bei dieser Methode führt man, nachdem die Brücke durch Veränderung des Gesamtwiderstandes W_1 des Zweiges 1 und des Verhältnisses $W_3 : W_4$ auf Null eingestellt ist, den Stab in die Spule I ein und bestimmt durch Wiederherstellung des Gleichgewichts die durch die Widerstandszunahme verlangte Veränderung von W_1 und die durch die Selbstinduktionsveränderung verursachte Variation des Verhältnisses $W_3 : W_4$. Da diese Methode nur eine Anwendung der überall bekannten und benutzten Maxwellschen Methode zur Vergleichung zweier Selbstinduktionen ist, so ist keine besondere Besprechung derselben nötig; sie ist auch von Wien (S. 308, l. c.) zu demselben Zweck verwendet worden und hat gegenüber der Methode 1 den Vorteil, a) daß $\triangle L$ und $\triangle W$ getrennt beobachtet werden können, und b) daß $\triangle L$ ebenso gut positiv wie negativ sein darf. Sie ist daher besonders geeignet zu dem Zweck der gegenwärtigen Versuche und zeichnet sich durch Einfachheit und Übersichtlichkeit aus. Die gewöhnliche Anordnung, in der zwischen den Widerstandspaaren W_1, W_2 und W_3, W_4 je ein Schleifkontakt eingeschaltet wird, ist im jetzigen Fall besonders günstig, da die unvermeidbaren kleinen veränderlichen Kontaktwiderstände nur in dem ohnehin stromlosen Galvanometerkreis auftreten und die Bestimmung der zu messenden kleinen Widerstandsveränderungen keineswegs beeinflussen.

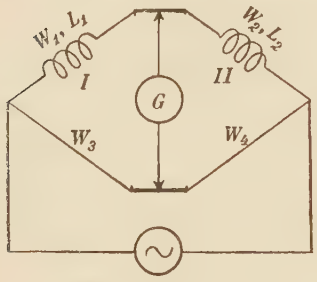


Fig. 11.

3. Der Gebrauch veränderlicher Selbstinduktion.

Offenbar ist es auch möglich, anstatt die Selbstinduktionsveränderung $\triangle L$ durch Variation des Widerstandsverhältnisses $W_3 : W_4$ zu messen, sie durch Veränderung der Selbstinduktion im zweiten Zweig auszugleichen. Diese Methode hat den Vorteil gegenüber der vorigen Methode, daß die Größe $\triangle L$ direkt ohne irgendeine Berechnung geliefert wird. Sie ist jedoch nicht in allen Fällen ausführbar wegen der Schwierigkeit, eine genaue veränderliche Selbstinduktionsnormale von kleiner absoluter Größe herzustellen.

4. Anwendung der Andersonschen Methode.

Es bleibt noch eine letzte Methode zu besprechen, die eigentlich nur eine Anwendung der Andersonschen[1]) Methode für die Vergleichung einer Selbstinduktion mit einer Kapazität ist. Die Brücke besteht (Fig. 12) aus vier Hauptzweigen, von denen drei aus induktionsfreien Widerständen gebildet sind, die vierte aber die induzierende Spule enthält, und weiter aus zwei Nebenzweigen, in welchen sich resp. ein veränderlicher Widerstand w und ein Kondensator von der Kapazität C befinden.

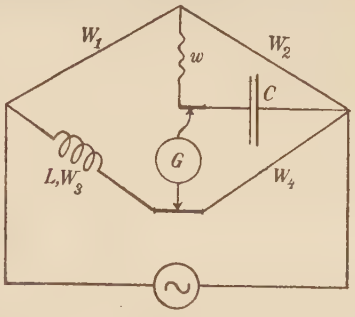


Fig. 12.

Die bekannten Gleichgewichtsbedingungen für diese Brücke sind

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{W_3}{W_4}$$

$$L = CW_4\left[\frac{w(W_1 + W_2)}{W_2} + W_1\right],$$

welche für den Fall $W_1 = W_2$ einfach

$$\text{(120)} \qquad \begin{cases} W_3 = W_4 \\ L = CW_4[2w + W_1] \end{cases}$$

liefern.

Ist die Brücke zum Gleichgewicht gebracht worden, so wird nach Einführung des Stabes in die Spule $\triangle L$ durch die zur Kompensation erforderliche Veränderung von w, $\triangle W$ durch die benötigte Veränderung des im Zweige 3 vor der Spule vorgeschalteten Widerstandes, der einen Teil des mit W_3 bezeichneten Gesamtwiderstandes ausmacht, gemessen. Um beträchtliche Fehler durch veränderliche Kontaktwiderstände vermeiden zu können, schalten wir Schleifkontakte nur in die Brücke zwischen W_3 und W_4 und zwischen w und dem Kondensator ein. Um eine möglichst große Empfindlichkeit zu bekommen, ist es empfehlenswert, die Kapazität groß zu wählen, z. B. einige Mikrofarad. Dabei ist allerdings zu beachten, daß für eine Kapazität dieser Größe selbst eine kleine Veränderung des Widerstandes im Kondensatorzweig noch einen Einfluß auf die Messungen von $\triangle L$ und $\triangle W$ haben kann. Was die Kapazität des Kondensators betrifft, so darf diese sich mit der Zeit nicht rasch verändern, aber ihr Wert braucht nicht bekannt zu sein. Einen ernstlicheren Nachteil hat die Methode darin, daß störende Wider-

1) Phil. Mag. 31, 1891, S. 329.

standsveränderungen infolge der Erwärmung der Spule nicht durch Symmetrie kompensiert sind, wie in den vorigen Fällen, in denen nämlich die durch Erwärmung in der einen der Spulen hervorgerufene Veränderung des Galvanometerstromes, durch die entgegengesetzte Wirkung der anderen symmetrischen Spule beinahe aufgehoben wird.

Die oben besprochene zweite Methode ist für die Versuche fast ausschließlich verwendet worden, nachdem durch die Versuche bewiesen war, daß ihre Ergebnisse mit denjenigen der ersten und vierten Methoden gut übereinstimmten.

Der Apparat.

Der Strom von einer Gleichstromquelle mit einer Spannung von etwa 20 Volt wurde von einer elektromagnetisch betriebenen Metallsaite[1]) unterbrochen und ohne Benutzung eines Transformators direkt durch die Brücke geschickt. Als Nullinstrument im Brückenzweige diente ein Wiensches Vibrationsgalvanometer.[2]) Bei jeder Versuchsreihe wurde die Schwingungsperiode des Stromes gleich der Eigenschwingungsperiode des Galvanometersystems gemacht. Dies geschieht sehr einfach, indem man die Brücke beinahe auf Null einstellt und dann durch Veränderung der Spannung der Saite ein Maximum des Galvanometerausschlages hervorruft. Bei 256 Schwingungen pro Sekunde hat eine Veränderung der Schwingungszahl um nur 0,1 % einen sehr merklichen Effekt. Die Abstimmung hält sich gewöhnlich sehr gut konstant. Der Gebrauch eines Telephons statt des Vibrationsgalvanometers ist nicht zu empfehlen. Das Telephon wäre nur bei einer fast rein sinusoidalen Wellenform möglich. Bei der Benutzung des Saitenunterbrechers dagegen hat es sich, auch bei Einschaltung eines Transformators zwischen dem Unterbrecher und der Brücke, als ganz unmöglich erwiesen, mittels des Telephons eine Nullstelle der Brücke zu finden.

Es ist zu beachten, daß infolge eines zufälligen zu großen Ausschlags des Galvanometers seine Magnete sehr leicht demagnetisiert werden können und folglich eine erhebliche Verringerung der Stromempfindlichkeit des Galvanometers stattfindet. Es ist aber sehr leicht die Empfindlichkeit wiederherzustellen, indem man das System aus dem Galvanometer entfernt und sorgfältig seine Magnete mit einem permanenten Magneten einfach berührt.

Die Spulen bestanden aus sechs Lagen 0,8 mm Kupferdraht, die auf ein 30 cm langes Glasrohr vom Durchmesser 3,5 cm gewickelt wurden. Sie hatten eine Selbstinduktion von ungefähr 12 Millihenry und einen

1) M. Wien, Wied. Ann. 42, 1891. S. 598.
2) M. Wien, Wied. Ann. (4) 4, 1901, S. 425.

Widerstand von 8,5 Ohm. Um den schädlichen Einfluß der Erwärmung der Spulen möglichst beseitigen zu können, wurden die Spulen in Paraffinöl untergetaucht und das Öl vor jeder Messung energisch gerührt. Die Stäbe wurden an Schnüren in der Spule, deren Achse vertikal stand, aufgehängt.

Die Vergleichswiderstände, die sich in den Zweigen 3 und 4 befanden, betrugen 10 Ohm. Zwischen den letzten wurde ein 1 m langer Brückendraht von 0,36 Ohm, und im Nebenschluß mit demselben ein Widerstand von 0,05 Ohm eingeschaltet. Entsprechend befanden sich auch zwischen den Zweigen 1 und 2 ein mit einem Nebenschluß von 0,05 Ohm versehener Brückendraht. Die durch Einführung des Stabes hervorgerufene Veränderung der zum Gleichgewicht der Brücke nötigen Werte der Zweigwiderstände waren, bei der Methode 2, als die Summe des Widerstandes von kleinen mit Quecksilbernäpfchen versehenen Widerstandsspulen von geeigneten Werten und der einer beobachteten Verschiebung des Schleifkontaktes entsprechenden Widerstandsveränderung gemessen.

Die Versuchsergebnisse.

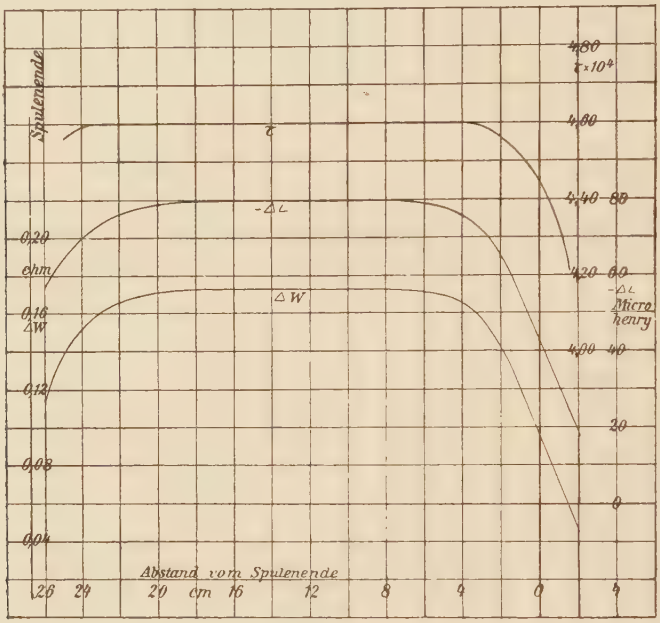
1. Einfluß der Lage.

Es ist zunächst als eine Hauptfrage anzusehen, inwieweit die für den idealen Fall eines unendlich langen Stabes in einem unendlich langen Solenoide abgeleiteten Formeln auf die praktisch vorkommenden Stäbe und Solenoide anwendbar sind.

Diese Frage ist untersucht worden, indem wir die Größen $\triangle L$ und $\triangle W$ für verschiedene Lagen des Stabes längs der Achse des Solenoides gemessen haben. Die Angaben einer solchen als typisch anzusehenden Versuchsreihe sind in der Kurve 14 aufgetragen. Dabei wurde ein Kupferstab mit einem Durchmesser von 1,5 cm und einer Länge von 5 cm benutzt. Als Abszisse wurde die Entfernung des hinteren Endes des Stabes vom Ende der Spule gewählt. Da die Spule eine Länge von etwa $31\frac{1}{2}$ cm hatte, so war bei einer Abszisse $= 26\frac{1}{2}$ cm das vordere Ende des Stabes bis zum vorderen Ende der Spule gekommen.

Aus der Kurve können wir den Schluß ziehen, daß bei Einführung des Stabes in die Spule die beiden Größen $\triangle L$ und $\triangle W$ schnell zunehmen und erst konstante Werte annehmen, wenn der Stab so weit in die Spule hineingeschoben ist, daß sein hinteres Ende 5 cm vom Spulenende absteht. Die Werte bleiben dann konstant bei weiterer Einschiebung, bis das vordere Ende in eine Entfernung von wieder etwa 5 cm (Abszisse $21\frac{1}{2}$ cm) gelangt ist. Schiebt man den Stab noch weiter, so nehmen $\triangle L$ und $\triangle W$ ab. Die Kurven von $\triangle L$ und $\triangle W$ zeigen sich durchaus

symmetrisch in bezug auf den Mittelpunkt der Achse der Spule. Übrigens zeigt der Vergleich der Kurve für τ mit denen für $\triangle L$ und $\triangle W$, daß trotz ganz beträchtlicher Variationen von $\triangle L$ und $\triangle W$ sich der Wert ihres Quotienten τ nur innerhalb enger Grenzen verändert und erst gegen das Ende der Spule abfällt.



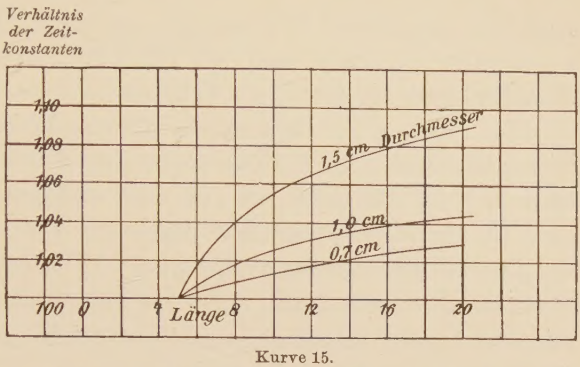
Kurve 14.
Einfluß der Lage des Stabes.

Bezüglich des Einflusses der radialen Inhomogenität des Feldes wurden einige Versuche gemacht, indem zunächst die betreffenden Größen bei zentrischer Lage des Stabes, sodann bei möglichst großer radialer Entfernung von der Achse gemessen wurden. Es ergab sich, daß der Einfluß auf $\triangle L$ und $\triangle W$ selbst in der Nähe des Endes der Spule nur einige pro Mille beträgt und in der Mitte fast zu vernachlässigen ist.

2. Der Einfluß der endlichen Länge des Stabes.

Um den Einfluß der endlichen Länge des Stabes zu untersuchen, wurden Stücke mit Längen von 5, 10, 15 und 20 cm von einem und demselben zylindrischen Kupferstab abgesägt und die Größen $\triangle L$, und $\triangle W$ und τ der einzelnen Stücke gemessen. Solche Versuchsreihen sind für drei Werte des Durchmessers 0,7, 1,0 und 1,5 cm ausgeführt worden. Die Angaben sind in der Tafel V und der Kurve 15 gegeben. Hierin sind die Verhältnisse der Werte der Zeitkonstanten, wie sie sich im Mittel aus

mehreren Messungen ergaben, zu dem Werte der Zeitkonstanten, bei einer Länge von 5 cm wiedergegeben. Aus der Tafel und der Kurve sieht man leicht, daß bei steigendem Verhältnis $\frac{\text{Länge}}{\text{Durchmesser}}$ die Zeitkonstante zunimmt und einem Grenzwert zustrebt. Bei fester Länge des Stabes ist dieser Effekt um so größer, je größer der Durchmesser ist, wie zu erwarten war. Die Selbstinduktionsverminderung $\triangle L$ ist sehr nahe der Länge proportional, die Widerstandszunahme $\triangle W$ aber nimmt langsamer als die Länge zu. Dadurch erklärt sich die Zunahme der Zeitkonstante τ. Die Genauigkeit der Beobachtungen scheint nicht genügend zu sein, um daraus den Grenzwert von τ für eine unendliche Länge des Stabes abzuleiten. Berechnet man aber unter der Voraussetzung des gewöhnlichen Werts von σ (nämlich $5{,}9 \cdot 10^{-4}$) die Zeitkonstante nach den theoretischen Formeln des Kapitels IV, so findet sich der Grenzwert um einige Prozente größer als der für eine Länge von 20 cm beobachtete.



Kurve 15.
Einfluß der Länge des Stabes mit verschiedenen Durchmessern.

Tafel V.

Mittlere Werte des Verhältnisses der Zeitkonstante als Funktion der Größe $\frac{\text{Länge}}{\text{Durchmesser}}$.

Durchmesser =	0,7	1,0	1,5
Länge			
5	1,00	1,00	1,00
10	1,01	$1{,}02_5$	$1{,}05_5$
15	$1{,}02_5$	$1{,}03_5$	$1{,}07_5$
20	1,03	$1{,}04_5$	1,09

Zurzeit ist die Abhängigkeit der Meßergebnisse von der Stablänge das wesentliche Hindernis, das der Verwendung der Methode zu einer genauen Bestimmung von σ noch im Wege steht. Es ist zu erwarten, daß durch theoretische Berechnung der diesbezüglichen Korrektion, wozu in Kap. III für den Fall des Bleches ein erster Ansatz gemacht ist, die Schwierigkeit behoben werden kann.

Der Einfluß der Permeabilität.

Einige Beobachtungen bei Stäben von Messing haben positive Werte von $\triangle L$ gegeben. Für einen 1,0 cm Stab z. B. wurden die Werte gefunden: $\triangle L = + 16{,}8$ micro-henry, $\triangle W = + 0{,}065$ und folglich

$$\tau = - 2{,}6 \cdot 10^{-4}.$$

Aus dem gemessenen Durchmesser und unter Annahme einer Leitfähigkeit $\sigma = 8 \cdot 10^{-5}$ berechnet sich aus (Gl. 111), also bei Vernachlässigung des Korrektionsgliedes (110), als Zeitkonstante $\tau = + 1{,}8 \cdot 10^{-4}$.

Bei Messing ist übrigens der positive Wert von $\triangle L$ keine Seltenheit. Dieser Umstand weist deutlich darauf hin, daß bei langsamen Schwingungen (hier 256 pro Sekunde) und bei nur mäßigen Werten der Permeabilität (wie sie bei Messing offenbar durch die Verunreinigung durch Eisen bei der Bearbeitung hervorgerufen wird) die letztere in der Berechnung berücksichtigt werden muß. Auch bei diamagnetischen Stäben wird es nötig sein, bei kleiner Schwingungszahl auf das Korrektionsglied $\frac{\mu - 1}{\mu} \cdot \varphi(\varrho)$ in Gleichung (102) besonders zu achten.

Auf die Bedeutung dieses Korrektionsgliedes war ich von Herrn Prof. Sommerfeld von Anfang an aufmerksam gemacht, und es war ein hauptsächlicher Gesichtspunkt bei dieser Arbeit, hierüber Klarheit zu schaffen. Leider ist dieses, da ich meine Arbeit vorzeitig abbrechen mußte, nicht zur Ausführung gekommen; das soeben genannte Beispiel des Messingstabes kann natürlich nicht als genügender Beweis für den genannten Effekt gelten.

Das Kapitel IV (Problem des Zylinders) und die Behandlung der Korrektion für eine endliche Breite beim Blech (Kapitel II) verdanke ich im wesentlichen Herrn Prof. Sommerfeld, dem ich an dieser Stelle für die Anregung zu dieser Arbeit und die liebenswürdige Hilfe während der Ausführung derselben meinen herzlichsten Dank aussprechen möchte. Das Kapitel III (Korrektion wegen der endlichen Länge) ist erst nach meinem Fortgange von München entstanden und gehört daher nicht zum eigentlichen Inhalt meiner Dissertation. Herr Prof. Sommerfeld hat diesen Teil meiner Arbeit nach mündlicher Vorbesprechung nur brieflich beeinflussen können.

Die Versuche sind im Laboratorium der mathematisch-physikalischen Sammlung des Staates ausgeführt. Ich beabsichtige in der nächsten Zeit weitere experimentelle Versuche im Laboratorium des Bureau of Standards in Washington bezüglich der Gültigkeitsbereiche der Formeln des theoretischen Teils auszuführen.

Lebenslauf.

Am 3. September 1876 wurde ich in Lynn, Massachusetts (Vereinigte Staaten von Amerika) geboren. 1894 absolvierte ich die „Lynn High School“ und bezog das „Massachusetts Institute of Technology“ in Boston, wo ich Physik und Elektrotechnik studierte. Dort bestand ich Juni 1899 die Prüfung als „Bachelor of Science“ physikalischer Richtung.

Während des Sommers 1899 beschäftigte ich mich als freiwilliger Beobachter an der Sternwarte von „Harvard College“ in Cambridge. Im September 1899 trat ich bei Herrn Prof. Dr. Rosa als Assistent für Physik an der „Wesleyan University“ zu Middletown, Connecticut ein, in welcher Stellung ich bis Sommer 1901 blieb. Dort studierte ich weiter Physik und Elektrotechnik und erlangte Juni 1901 die Magisterwürde (Master of Science).

Von September 1901 bis Juli 1902 war ich Lehrer der Elektrotechnik am „Lafayette College“ zu Easton, Pennsylvania.

Im Juli 1902 bestand ich die staatliche Prüfung als „Laboratory Assistant“ an dem „Bureau of Standards“ zu Washington, wo ich seit jener Zeit (von 1904 an als „Assistant Physicist“) geblieben bin. Dort habe ich mich mit den Methoden für die genaue Messung von Selbstinduktion und Kapazität beschäftigt, nach Anleitung von Herrn Prof. Rosa, dem ich meinen tiefempfundenen Dank für sein stetes Interesse und seine langjährige Hilfe aussprechen möchte.

Außerdem studierte ich an der „George Washington University“ in Washington, wo ich Juni 1907 die Prüfung als „Doctor of Philosophy“ bestand.

Im Herbst 1907 bekam ich Urlaub, um in München bei Herrn Prof. Sommerfeld zu arbeiten, dem ich für liebenswürdige Hilfe und anregenden Rat herzlichst danke.